Chapitre 14 : Dérivée des fonctions trigonométriques

Durant notre cours de mathématiques de 5ème secondaire, nous avons étudié de long et en large les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Nous aborderons dans ce présent chapitre l'étude des dérivées de ces trois fonctions.

14.1 Dérivée de fonctions sinus

Proposition 1 : Si $H(x) = \ sin\ x,\ alors\ H'(x)\ =\ cos\ x$

Exemple 14.1

Calculons la dérivée de $f(x) = 2xsinx$

$f'(x) = (2x)'sinx + 2x(sinx)'$ Proposition 5 (du chap. 8)

$f'(x) = 2sinx + 2xcosx$ Proposition 1

Exemple 14.2

Calculons la dérivée de $f(x) = sin^4x$

$f'(x) = 4sin^3x(sinx)'$ Dérivation en chaîne (proposition 8) chapitre 10

$= 4sin^3xcosx$

Voici un bref rappel de ce qu'est la dérivation en chaîne. Cette méthode pour trouver la dérivée d'une fonction composée est très similaire à la proposition 7 vue au chapitre 10. La règle de la dérivation en chaîne est en quelque sorte sa généralisation.

Règle de dérivation en chaîne :

Proposition 8 du chapitre 8:

Si $H(x) = \ f[g(x)],\ alors\ H'(x) = f'([g(x)]g'(x)$

Voici un exemple simple pour vous permettre de constater que cette proposition est facile à appliquer.

Calculons la dérivée de $H(x) = (x^3 + 5x)^7$

Si $H'(\text{x}) = \ \text{r}[f(x)]^{r-1}f'(x),\ proposition\ 7\ \ alors$

$H'(x) = 7(x^3 + 5x)^6(x^3 + 5x)'$

$H'(x) = 7(x^3 + 5x)^6\ (3x^2 + 5)$

Nous pouvons prendre le traitement de deux fonctions de manière distincte,

soit $f(x) = x^7 et\ g(x) = x^3 + 5x$, voici donc une autre façon de trouver cette même dérivée soit avec la règle de la dérivée en chaîne:

$Si\ f(x) = x^7, alors\ f'(x) = 7x^6 et\ si\ g(x) = x^3 + 5x, alors\ g'(x) = 3x^2 + 5$

Par la proposition 8 :

$H'(x) = f'([g(x)]g'(x)$

$\quad = 7[g(x)]^6(3x^2 + 5)$

Comme vu dans notre cours (**Compositions de fonctions** : On met $g(x) : (x^3 + 5x)$ dans la fonction $f'(x) = 7x^6$ à la place du x.

$\quad = 7(x^3 + 5x)^6(3x^2 + 5)$

Revenons au but de ce chapitre, soit les dérivées des fonctions trigonométriques.

Proposition 1' : Si $H(x) = \ sin\ f(x),\ alors\ H'(x) \ = \ [cos\ f(x)]f'(x)$

Exemple 14.3

Calculons la dérivée de : $H(x) = \sin(3x^4 - 2x^3)$ alors,

$H'(x) = \cos(3x^4 - 2x^3)(3x^4 - 2x^3)'$ $Proposition\ 1'$ et dérivation en chaîne

$H'(x) = \cos(3x^4 - 2x^3)\,(12x^3 - 6x^2)$

Exemple 14.4

Si $f(x) = sin^3(x^2 - sinx)$, alors

$f'(x) = [sin^3(x^2 - sinx)]'$

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)[sin(x^2 - sinx)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)\ cos(x^2 - sinx)(x^2 - sinx)'$ *Proposition 1'*

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)\ cos(x^2 - sinx)(2x - cosx)$

Exercice 14.1

Calculer les dérivées des fonctions sinus suivantes :

a) $f(x) = x^4 sinx$

b) $f(x) = sin\frac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = xsin^5(x^2-6)$

d) $f(x) = \frac{1}{sinx}$

14.2 Dérivée de fonctions cosinus

Proposition 2 : Si $H(x) = \ cos\ x, \ alors\ H'(x) = \ -sin\ x$

Exemple 14.5

$f(x) = \ \sqrt{\cos x}$

$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$ alors,

$f'(x) = \frac{1}{2}(cos)^{\frac{-1}{2}}(cosx)' \quad dérivation\ en\ chaîne$

$f'(x) = \frac{1}{2}(cos)^{\frac{-1}{2}}(-sinx)$ *Proposition 2*

$f'(x) = \dfrac{-sinx}{2(cos\ x)^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x) = \dfrac{-sinx}{2\sqrt{cosx}}$

Proposition 2' : Si $H(x) = \ cos\ f(x), \ alors\ H'(x) = \ [-sinf(x)]f'(x)$

Exemple 14.6

Calculons la dérivée

$f(x) = \cos(3x^2)$, alors

$f'(x) = -\sin(3x^2)[3x^2]'$ *Proposition 2'*

$f'(x) = -\sin(3x^2)\ [6x]$

$f'^{(x)} = -6x\sin 3x^2$

Exercice 14.2

Calculer les dérivées des fonctions cosinus suivantes :

a) $f(x) = cos2x - cos^3x$

b) $f(x) = \frac{3x}{cosx}$

c) $f(x) = \ cos^4(2x^5 - 3)$

Poursuivons afin de trouver les dérivées de fonctions trigonométriques plus complexes. Vous verrez, ayant compris les dérivées des fonctions sinus et cosinus, il suffira de traiter le calcul de ces dérivées dans le même esprit.

Exemple 14.7

Calculons la dérivée de :

$f(x) = cosx^2 - 5\sin(3x - x^2)$

Donc, $f'(x) = [cosx^2]' - [5\sin(3x - x^2)]'$

$f'(x) = \ -sinx^2(x^2)' - 5cos(3x - x^2)(3x - x^2)'$ *Propositions 1' et 2'*

$f'(x) = \ -sinx^2(2x) - 5cos(3x - x^2)(3 - 2x)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - 5(3 - 2x)cos(3x - x^2)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - (15 + 10x)cos(3x - x^2)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - 15cos(3x - x^2) + 10xcos(3x - x^2)$

En voici un à la hauteur de votre intelligence… En y allant étape par étape, proposition par proposition, nous y arriverons peu importe sa complexité!

Exemple 14.8

Calculons la dérivée de :

$f(x) = sin^3(x^2 + 5) + \ cos^2(2x^4 + 1)$

Donc, $f'(x) = [sin^3(x^2 + 5)]' + [cos^2(2x^4 + 1)]'$

$f'(x) = 3sin^2(x^2 + 5)[sin(x^2 + 5)]' + 2\cos(2x^4 + 1)[\cos(2x^4 + 1)]'$ *Dérivation en chaîne à deux reprises*

$f'(x) = 3sin^2(x^2 + 5)cos(x^2 + 5)(x^2 + 5)' + 2\cos(2x^4 + 1)(-sin(2x^4 + 1)(2x^4 + 1)'$

Propositions 1' et 2'

$f'(x) = 3sin^2(x^2 + 5)cos(x^2 + 5)(2x) + 2\cos(2x^4 + 1)(-sin(2x^4 + 1)(8x^3)$

$f'(x) = 6xsin^2(x^2 + 5)cos(x^2 + 5) - 16x^3\cos(2x^4 + 1)(sin(2x^4 + 1)$

Voilà!

Exercice 14.3

Calculer les dérivées de fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos(x^4 + sinx)$

b) $f(x) = \cos(sinx) - sin(cosx)$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos(-x^3)$

14.3 Dérivée des fonction tangente, cotangente, sécante et cosécante

Proposition 3 : Si $H(x) = \ tan\ x,\ alors\ H'(x) = \ sec^2x$

À défaut de n'avoir pas fait la preuve des propositions précédentes, je me dois d'au moins prouver cette proposition 3.

Si $H'(x) = \ (tan\ x)' = \ \left(\frac{sinx}{cosx}\right)'\ \ Identité\ bien\ connu\ de\ mon\ cours\ ...$

$$f'(x) = \frac{(sinx)'cosx - sinx\ (cosx)'}{cos^2x}\ \ dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{cosx\ cosx - sinx\ (-sinx)}{cos^2x}\quad propositions\ 1\ et\ 2$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x}\qquad car\ sin^2x + cos^2x = 1$$

$$f'(x) = sec^2x\qquad car\ \frac{1}{cosx} = sec\ x$$

Avouez que c'est une belle preuve!

Exemple 14. 9

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x^5tanx\ \ alors,$

$f'(x) = (x^5)'tanx + x^5(tanx)'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = 5x^4tanx + x^5sec^2x\ \ Proposition\ 3$

Proposition 3' : Si $H(x) = \ tan\ f(x),\ alors\ H'(x) = \ [sec^2 f(x)]f'(x)$

Exemple 14.10

Calculons la dérivée de :

$f(x) = tan(x^2 - 3x)$ alors,

$f'(x) = sec^2(x^2 - 3x)[(x^2 - 3x]' \qquad proposition\ 3'$

$f'(x) = sec^2(x^2 - 3x)(2x - 3)$

$f'(x) = (2x - 3)sec^2(x^2 - 3x)$

Proposition 4 : Si $H(x) = \cot x\ ,\ alors\ H'(x) = \ -csc^2 x$

Exemple 14.11

Calculons la dérivée de :

$f(x) = \dfrac{2x + x^3}{\cot x} \quad alors,$

$f'(x) = \dfrac{(2x + x^3)' \cot x - (\ 2x + x^3)(\cot x)'}{cot^2 x} \qquad Dérivée\ d'un\ quotient$

$f'(x) = \dfrac{(2 + 3x^2) \cot x - (\ 2x + x^3)(-csc^2 x)}{cot^2 x} \qquad Proposition\ 4$

$f'(x) = \dfrac{(2 + 3x^2) \cot x + (\ 2x + x^3)(csc^2 x)}{cot^2 x}$

Proposition 4' : Si $H(x) = \cot f(x)\ ,\ alors\ H'(x) = \ [-csc^2 f(x)]\ f'(x)$

Exemple 14.12

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x + cot(sinx)$ alors,

$f'(x) = (x)' + [\cot(sinx)]'$

$f'(x) = 1 + \ [-csc^2(sinx)]\ (sinx)' \qquad Proposition\ 4'$

$f'(x) = 1 + \ [-csc^2(sinx)] \cos x \qquad Proposition\ 1$

$f'(x) = 1 - \cos x\ csc^2(sinx)$

Proposition 5 : Si $H(x) = \sec x$, $alors\ H'(x) = \sec x\ tanx$

À défaut de vous offrir un exemple, je trouvais plus pertinent de présenter la preuve de cette proposition.

$$H'(x) = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)'\cos x - 1\ (cosx)'}{cos^2x}$$
$$= \frac{0 - 1(-sinx)}{cos^2x}$$
$$= \frac{\sin x}{cos^2x}$$
$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \sec x \tan x \qquad Voil\text{à}$$

Proposition 5' : Si $H(x) = \sec f(x)$, $alors\ H'(x) = [\sec f(x) tanf(x)\ ]\ f'(x)$

Exemple 14.13

Calculons la dérivée de :

$f(x) = \sec(4x^2 - 5x + 2)$, $\quad alors$

$f'(x) = \ \sec(4x^2 - 5x + 2)\tan(4x^2 - 5x + 2)\ (\ 4x^2 - 5x + 2)' \quad proposition\ 5'$

$f'(x) = \ \sec(4x^2 - 5x + 2)\tan(4x^2 - 5x + 2)\ (\ 8x - 5)$

$f'(x) = \ (8x - 5)\sec(4x^2 - 5x + 2)\tan(4x^2 - 5x + 2)$

Proposition 6 : Si $H(x) = \csc x$, $alors\ H'(x) = -\csc x \cot x$

Exemple 14.14

Calculons la dérivée de :

$f(x) = 6x^2 \csc x \quad alors,$

$f'(x) = (6x^2)' \csc x + 6x^2(\csc x)' \quad D\acute{e}riv\acute{e}e\ d'un\ produit$

$f'(x) = 12x \csc x + 6x^2(-\csc x)\cot x \quad Proposition\ 6$

$f'(x) = 12x \csc x - 6x^2 \csc x \cot x$

Proposition 6' : Si $H(x) = \csc f(x)$, $alors\ H'(x) = [-\csc f(x) \cot f(x)]\ f'(x)$

Exemple 14.15

Calculons la dérivée de :

$f(x) = csc^4(6 + x^5) \quad alors,$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[\csc(6 + x^5)]' \quad Dérivation\ en\ chaîne$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[-\csc(6 + x^5) \cot(6 + x^5)]\ (6 + x^5)' \quad Proposition\ 6'$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[-\csc(6 + x^5) \cot(6 + x^5)]\ (5x^4)$

$f'(x) = -20x^4 csc^4(6 + x^5)\ \cot(6 + x^5)$

Exercice 14.4

Calculer les dérivées des fonctions trigonométriques suivantes :

a) $f(x) = \sec(3x) + \tan(2x^3 - 5x)$

b) $f(x) = \sin[\cos(2x)]$

c) $f(x) = \sqrt{\cot x} + \sec x$

d) $f(x) = tan^2 3x + sec^4(5x)$

e) $f(x) = 7x^3 - 4\sin(3x) + \csc(2 - x^3)$

f) $f(x) = \cot\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$

g) $f(x) = \frac{\tan 5x}{3 - \cot 3x}$

Chapitre 15 : Dérivée des fonctions trigonométriques

15.1 Dérivée des fonctions réciproques de sinus, cosinus, tangente et cotangente

Dans ce dernier chapitre, nous étudierons les dérivées des fonctions réciproques ou inverses de sinus, cosinus, tangente et cotangente (arc sin, arc cos, arc tan et arc cot)

Dérivée d'arc sin x :

Proposition 1 : Si $f(x) = \ arc\ sin\ x,\ \ alors\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Prouvons ensemble cette proposition.

$\sin(arc \sin x) = x, car \sin(sin^{-1}x) = x\ tel\ que\ vu\ dans\ mon\ cours!$

$[\sin(arc\ sinx)]' = x'\ \ en\ dérivant\ le\ deux\ membres\ de\ l'équation$

$\cos(\arcsin x)(arcsinx)' = 1\ \ Proposition\ 1'du\ chapitre\ 14$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}\ puisque\ nous\ recherchons\ la\ dérivée\ de\ arcsin\ x, donc\ on\ l'isole$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos\big(f(x)\big)}\ \ car\ comme\ la\ proposition\ 1\ le\ dit\ \ f(x) = \ arc\ sin\ x$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos y}\ \ \ car\ y = f(x)\ par\ définition$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sin^2y}}$

Car comme : $sin^2y + cos^2y = 1, donc\ cos^2y = 1 - sin^2y, donc \cos y = \sqrt{1 - sin^2y}$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ \textit{Fin de la preuve!}$$

Car $x^2 = sin^2y\ et\ en\ voici\ le\ pourquoi$:

si $y = arc \sin x,\ \ alors$

$\sin y = \sin arc \sin x, appliqué\ le\ sinus\ aux\ deux\ membres$

Donc, $sin\ y = \sin sin^{-1}x$

$\sin y = x$

Oui, elle est assez complexe, mais des preuves de ce genre, vous en aurez à la tonne dans votre cours de calcul 1…

Exemple 15.1

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x^2 arc \sin x$

$f'(x) = (x^2)' \arcsin x + x^2 (arc \sin x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$

$f'(x) = 2x \arcsin x + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad Proposition\ 1$

$f'(x) = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Proposition 1' : Si $H(x) = arc\ sin\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}} f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

Exemple 15.2

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arcsin(2x^5 - 8x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}} (2x^5 - 8x)' \quad Proposition\ 1'$

$f'(x) = \frac{10x^4 - 8}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}} \quad ce\ qui\ est\ très\ simple\ comme\ vous\ le\ voyez\ …$

Dérivée d'arc cos x :

Proposition 2 : Si $f(x) = arc\ cos\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Comme la preuve de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 1, je passe immédiatement à un exemple.

Exemple 15.3

Calculons la dérivée de : $f(x) = (\arccos\ x)^3$

$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2 (\arccos\ x)' \quad Dérivation\ en\ chaîne$

$$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2 \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad Proposition\ 2$$

$$f'(x) = \frac{-3(\arccos\ x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 2' : Si $H(x) = \ arc\ cos\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}} f'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

Exemple 15.4

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arccos(-x^3 + 7x^2 - 4)$

$$f'(x) = \frac{-(-3x^2 + 14x)}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 14x}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

Dérivée d'arc tan x :

Proposition 3 : Si $f(x) = \ arc\ tan\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exemple 15.5

Calculons la dérivée de : $f(x) = (lnx)(\arctan x)$

$$f'(x) = (lnx)' \arctan x + lnx(\arctan x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\arctan x + lnx\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad Dérivée\ de\ lnx\ et\ proposition\ 3$$

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{x} + \frac{lnx}{1+x^2}$$

Proposition 3' : Si $H(x) = \ arc\ tan\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Exemple 15.6

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arctan(x^2 - 7)^3$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-7)^6}[(x^2-7)^3]' \qquad Proposition\ 3'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-7)^6}\ 3(x^2-7)^2\ \ (x^2-7)' \quad \textit{Dérivation en chaîne}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-7)^6}\ 3(x^2-7)^2\ (2x)$$

$$f'(x) = \frac{6x(x^2-7)^2}{1+(x^2-7)^6}$$

Dérivée d'arc cot x :

> ***Proposition 4*** : Si $f(x) = \ arc\ cot\ x,\ \ alors\ f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Comme cette proposition est très similaire à la proposition 3, passons immédiatement à la suivante.

> ***Proposition 4'*** : Si $H(x) = \ arc\ cot\ f(x),\ \ alors\ H'(x) = \frac{-1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

<u>Exemple 15.7</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = \operatorname{arccot}(x^3 + \tan x)$

$$f'(x) = \frac{-(x^3+\tan x)'}{1+(x^3+\tan x)^2} \qquad \textit{Proposition } 4'$$

$$f'(x) = \frac{-\left(3x^2+sec^2x\right)}{1+(x^3+\tan x)^2} \qquad \textit{Proposition 3 du chap}.14$$

Exercice 15.1

Calculons la dérivée de :

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc \tan x)$

c) $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{arc \cot 2x}$

d) $f(x) = arc \sin(\tan x) - \arccos(cscx)$

e) $f(x) = \frac{arc \cos x^3}{arc \sin x^2}$

f) $f(x) = \ln(arc \tan e^x)$

g) $f(x) = \ 2x^3 - \sin x \operatorname{arccot} 5x$

15.2 Dérivée des fonctions réciproques de sécante et cosécante

En conclusion de ce chapitre, voici les propositions concernant les dérivées des fonctions arc sécante et arc cosécante. Cependant, je vous fournirai seulement que les propositions, car la manière de trouver les dérivées de ces fonctions est, à mon avis, trop redondante pour les analyser plus en détails par des exemples ou des exercices. Pour tout vous dire, certains professeurs de cégep ne les étudient même pas…

Dérivée d'arc sec x :

Proposition 5 : Si $f(x) = \ arc\ sec\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 5' : Si $H(x) = \ arc\ sec\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Dérivée d'arc csc x :

Proposition 6 : Si $f(x) = \ arc\ csc\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 6' : Si $H(x) = \ arc\ csc\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Ces dérivées devraient être la fin, oui oui la **FIN** de votre cours de Calcul 1. J'espère que ce document aura su vous aider à mieux comprendre votre premier cours de calcul différentiel du cégep. Il ne vous restera plus qu'à attaquer le cours de Calcul 2; LES INTÉGRALES!!!!

Réponses

Exercice 14.1

$a)\ f(x) = x^4 sinx$ alors,

$f'(x) = (x^4)'sinx + x^4(sinx)'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = 3x^3 sinx + x^4 \cos x$

b) $f(x) = sin\frac{x^2}{x-1}$ alors,

$f'(x) = [cos\, f(x)]f'(x)$ *Proposition 1'*

$$f'(x) = \left[cos\ \frac{x^2}{x-1}\right]\frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \qquad \textit{Dérivée d'un quotient}$$

$$f'(x) = \left[cos\ \frac{x^2}{x-1}\right]\frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \qquad \textit{Dérivée d'un quotient}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} cos\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \ \textit{par pur esthétisme} \ldots$$

c) $f(x) = xsin^5(x^2 - 6)$ alors,

$f'(x) = (x)'sin^5(x^2 - 6) + x(sin^5(x^2 - 6))'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\,[5sin^4(x^2 - 6)][\sin(x^2 - 6)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\,[5sin^4(x^2 - 6)][\cos(x^2 - 6)](x^2 - 6)'\ \ proposition1'$

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\,[5sin^4(x^2 - 6)][\cos(x^2 - 6)]2x$

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + 10x^2\, sin^4(x^2 - 6)\cos(x^2 - 6)$

d) $f(x) = \frac{1}{sinx}$ alors,

$f'(x) = [(sinx)^{-1}]'$

$f'(x) = -sin^{-2}x\ (sinx)'$

$f'(x) = -sin^{-2}x \cos x$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{sin^2 x}$$

Exercice 14.2

a) $f(x) = cos2x - cos^3x$ alors,

$f'(x) = (cos2x)' - (cos^3x)'$

$f'(x) = (-sin2x)2 - 3(cos^2x)(cosx)' \quad Proposition\ 2'\ et\ dérivation\ en\ chaîne$

$f'(x) = -2sin2x - 3(cos^2x)(-sinx) \quad Proposition\ 2$

$f'(x) = -2sin2x + 3cos^2x\ sinx$

b) $f(x) = \frac{3x}{cosx}$ alors,

$f'(x) = \frac{(3x)'cosx - 3x\ (cosx)'}{cos^2x}$ *Dérivée d'un quotient*

$f'(x) = \frac{3cosx - 3x\ (-sinx)}{cos^2x}$ *Proposition 2*

$$f'(x) = \frac{3cosx + 3xsinx}{cos^2x}$$

c) $f(x) = cos^4(2x^5 - 3)$ alors,

$f'(x) = 4cos^3(2x^5 - 3)[\cos(2x^5 - 3)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = 4cos^3(2x^5 - 3)[-sin(2x^5 - 3)](2x^5 - 3)'$ *Proposition 2'*

$f'(x) = 4cos^3(2x^5 - 3)[-\sin(2x^5 - 3)](10x^4)$

$f'(x) = -40x^4cos^3(2x^5 - 3)\sin(2x^5 - 3)$

Exercice 14.3

$a)\ f(x) = \cos(x^4 + sinx) \quad alors,$

$f'(x) = -\sin(x^4 + sinx)(x^4 + sinx)' \quad Proposition\ 2'$

$f'(x) = \sin(x^4 + sinx)(4x^3 + cosx) \quad Proposition\ 1$

b) $f(x) = \cos(sinx) - sin(cosx)$ alors,

$f'(x) = -\sin(sinx)\ (sinx)' - cos(cosx)(cosx)'$ Proposition 1' et 2'

$f'(x) = -\sin(sinx)\ cosx - cos(cosx)(sinx)$

$f'(x) - cosx \sin(sinx) - sinx\ cos(cosx)$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos(-x^3)$ alors,

$$f'(x) = \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]'\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[\cos(-x^3)]' \quad \textit{dérivée d'un produit}$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[-\sin(-x^3)](-x^3)' \quad \textit{Propositions 1' et 2'}$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{(1)'\sqrt{x} - 1\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}^2}\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[-\sin(-x^3)](-3x^2) \quad \textit{Dérivée d'un quotient}$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{0 - 1\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{x}\cos(-x^3) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2}\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)}{x}\cos(-x^3) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}\cos(-x^3) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)\cos(-x^3) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos(-x^3) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

Exercice 14.4

a) $f(x) = \sec(3x) + \tan(2x^3 - 5x)$ $\quad alors,$

$$f'(x) = [\sec(3x)]' + [\tan(2x^3 - 5x)]'$$

$$f'(x) = \sec(3x)\tan 3x\ (3x)' + sec^2(2x^3 - 5x)(2x^3 - 5x)' \quad Propositions\ 5' et\ 3'$$

$$f'(x) = \sec(3x)\tan 3x\ (3) + sec^2(2x^3 - 5x)(\,6x^2 - 5) \quad Propositions\ 5' et\ 3'$$

$$f'(x) = 3\sec(3x)\tan 3x\ + (6x^2 - 5)\ sec^2(2x^3 - 5x) \quad Propositions\ 5' et\ 3'$$

b) $f(x) = \sin[\cos(2x)]$ $\quad alors,$

$$f'(x) = cos[\cos(2x)][\cos(2x)]' \quad Proposition\ 2'$$

$f'(x) = cos[\cos(2x)]\,[-\sin(2x)]\,(2x)' \quad Proposition\ 1'$

$f'(x) = cos[\cos(2x)]\,[-\sin(2x)]\,(2)$

$f'(x) = -2cos[\cos(2x)]\sin(2x)$

c) $f(x) = \sqrt{\cot x} + \sec x$ comme,

$f(x) = (\cot x)^{\frac{1}{2}} + \sec x \quad alors,$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}cot^{\frac{-1}{2}}x\,(\cot x)' + \sec x \tan\ x \quad Dérivation\ en\ chaîne\ et\ \ proposition\ 5$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}cot^{\frac{-1}{2}}x(-csc^2x)\sec x\tan x \qquad Proposition\ 4$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\ cot^{\frac{1}{2}}x}(-csc^2x)\sec x\tan x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\cot x}}(-csc^2x)\sec x\tan x$

$f'(x) = \dfrac{(-csc^2x)\sec x\tan x}{2\sqrt{\cot x}}$

d) $f(x) = tan^2 3x + sec^4(5x) \quad alors,$

$f'(x) = [tan^2(3x)]' + [sec^4(5x)]'$

$f'(x) = 2\tan(3x)\,[\tan(3x)]' + 4sec^3(5x)[\sec(5x)]' \quad Dérivations\ en\ chaîne$

$f'(x) = 2\tan(3x)\,sec^2(3x)(3x)' + 4sec^3(5x)\sec(5x)\tan(5x)\,(5x)'\ Propositions\ 3'et\ 5'$

$f'(x) = 2\tan(3x)\,sec^2(3x)(3) + 4sec^3(5x)\sec(5x)\tan(5x)\,(5)$

$f'(x) = 6\tan(3x)\,sec^2(3x) + 20sec^4(5x)\tan(5x)$

e) $f(x) = 7x^3 - 4\sin(3x) + \csc(2-x^3)\,, alors$

$f'(x) = 21x^2 - 4\cos(3x)(3x)' - \csc(2-x^3)\cot(2-x^3)(2-x^3)'\ \ propositions\ 2'\ et\ 6'$

$f'(x) = 21x^2 - 4\cos(3x)(3) - \csc(2-x^3)\cot(2-x^3)(-3x^2)$

$f'(x) = 21x^2 - 12\cos(3x) + 3x^2\csc(2-x^3)\cot(2-x^3)$

f) $f(x) = \cot\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$ *alors*,

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left(\frac{x+5}{x-1}\right)' \; Proposition\ 4'$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{(x+5)'(x-1)-(x+5)(x-1)'}{(x-1)^2}\right] \; Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{1(x-1)-(x+5)(1)}{(x-1)^2}\right]$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{-6}{(x-1)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x-1)^2}csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$$

g) $f(x) = \frac{\tan 5x}{3-\cot 3x}$ *alors*

$$f'(x) = \frac{(\tan 5x)'(3-\cot 3x)-(\tan 5x)(3-\cot 3x)'}{(3-\cot 3x)^2} \quad dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{(\sec^2(5x)(5x)'(3-\cot 3x)-(\tan 5x)(-[-csc^2 3x])(3x)'}{(3-\cot 3x)^2} \; Propositions\ 3' et\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{(\sec^2(5x)(5)(3-\cot 3x)-(\tan 5x)\,csc^2(3x)\,(3)}{(3-\cot 3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5sec^2 5x[3-\cot 3x]-3\tan 5x\,csc^2 3x}{(3-\cot 3x)^2}$$

Exercice 15.1

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx$ *alors*,

$$f'(x) = \ (sinx-5)'(\operatorname{arccot} x)+(\sin x-5)(\operatorname{arccot} x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$$

$$f'(x) = \cos x\,(\operatorname{arccot} x)+(\sin x-5)\frac{-1}{1+x^2} \quad Proposition\ 1\ (chap. 14)\ et\ 4$$

$$f'(x) = \cos x\,(\operatorname{arccot} x)-\frac{(\sin x-5)}{1+x^2}$$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc\tan x)$ *alors*,

$f'(x) = (\arccos x)'(\arctan x) + (\arccos x)(\arctan x)'$ *Dérivée d'un produit*

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,(\arctan x) + (\arccos x)\,\frac{1}{1+x^2} \quad Propositions\ 2\ et\ 3$$

$$f'(x) = \frac{-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{1+x^2}$$

c) $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{arc\cot 2x}$ *alors,*

$$f'(x) = \frac{\left(\arctan\sqrt{x}\right)' arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\,(arc\cot 2x)'}{(arc\cot 2x)^2} \quad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}\, arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\frac{-(2x)'}{1+(2x)^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2} \quad Propositions\ 3'\ et\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{1+x}\, arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\frac{-2}{1+4x^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\, arc\cot 2x + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{arc\cot 2x}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

d) $f(x) = arc\sin(\tan x) - \arccos(cscx)$ *alors,*

$$f'(x) = [\arcsin tanx]' - [\arccos(cscx)]'$$

$$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{-(-\csc x\cot x)}{\sqrt{1-csc^2x}} \quad Propositions\ 3\ Chap. 14, 1'et\ propositions\ 6\ chap. 14, 2'$$

$$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{\csc x\cot x}{\sqrt{1-csc^2x}}$$

e) $f(x) = \frac{arc\cos x^3}{arc\sin x^2}$ *alors,*

$$f'(x) = \frac{(arc\cos x^3)' \arcsin x^2 - \arccos x^3 (\ arc\sin x^2)'}{(arc\sin x^2)^2} \quad \textit{Dérivée d'un quotient}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-(3x^2)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \arcsin x^2 - \arccos x^3 \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}}{(arc\sin x^2)^2} \quad \textit{Proposition } 2' \textit{et } 1'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-3x^2 \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{2x \arccos x^3}{\sqrt{1-x^4}}}{(arc\sin x^2)^2}$$

f) $f(x) = \ln(arc\tan e^x) \quad alors,$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x} (arc\tan e^x)' \quad \textit{Dérivée de } \ln \textit{et dérivation en chaîne}$$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \quad \textit{Dérivée de } e^x \textit{ Proposition } 3'$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(arc\tan e^x)(1+e^{2x})}$$

g) $f(x) = \ 2x^3 - \sin x \operatorname{arccot} 5x \quad alors,$

$$f'(x) = (2x^3)' - (\sin x \operatorname{arccot} 5x)'$$

$$f'(x) = 6x^2 - (\sin x)' \operatorname{arccot} 5x + sinx\ (\operatorname{arccot} 5x)' \quad \textit{Dérivée d'un produit}$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x \operatorname{arccot} 5x + \sin x \ \frac{-5}{1+25x^2}$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x \operatorname{arccot} 5x - \frac{5\sin x}{1+25x^2}$$