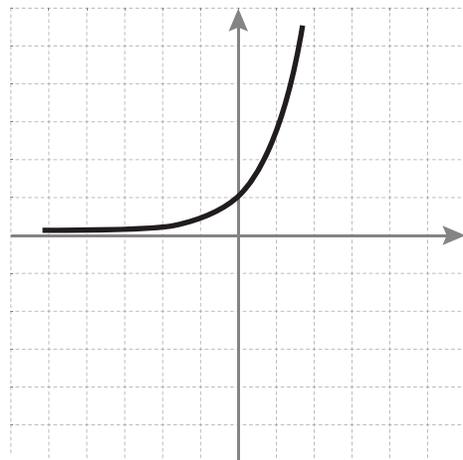


FONC TIONS

EXPONENTIELLES ET
LOGARITHMIQUES

LES MÉCHANTS
BONS PROBLÈMES



Méchants bons problèmes : Les fonctions exponentielles et logarithmiques

1- Donner les valeurs des trois termes suivants dans ces suites géométriques :

a) 6, 18, 54, 162, ...

b) 2916, 324, 36, ...

2- Déterminer les valeurs des deux termes manquants dans ces suites où chacun des termes est lié au suivant par un même facteur multiplicatif qu'on appelle la raison.

a) 13; _____; _____; 1625

b) 4; _____; 324; _____; 26 244

c) 3,5; _____; 56; _____; 896 (Notez que le 1^{er} terme est 3,5)

3- Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

a) $\left(\frac{3^2 \cdot 9}{243}\right)^{-3}$

b) $\frac{49^2 \cdot 343^{-2}}{\sqrt{2401^{-1}}}$

c) $\sqrt{\frac{2^{-2}}{16^{-1}}}$

4- Indiquer si la situation fait appel à un modèle exponentiel.

a) La population d'une ville augmente de 2,8 % par an.

b) Le remplissage d'une piscine à l'aide d'un boyau à débit constant.

c) La vitesse d'une balle en chute libre selon le temps.

d) La population de bactéries triple toutes les demi-heures.

e) La valeur d'une maison en fonction des années.

5- Écrire chacune des égalités suivantes sous la forme logarithmique.

a) $3^4 = 81$

b) $144^{\frac{1}{2}} = 12$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

6- Écrire chacune des égalités suivantes sous la forme exponentielle.

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_5 1 = 0$

c) $\log 1000 = 3$

7- Calculer, sans calculatrice, les logarithmes suivants:

a) $\log_5 25$

b) $\log_3 \frac{1}{81}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

8-

Écrivez ces règles sous forme canonique à 3 paramètres. (a, h et k)

a) $y = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+12} - 5$

b) $y = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+6} + 1$

9- La règle d'une fonction exponentielle est $f(x) = -3(10)^{-2x+10} + 7$

a) Déterminer l'équation de l'asymptote.

b) Représenter graphiquement la fonction f .

10- Tracer le graphique des fonctions dont les règles sont les suivantes :

a) $f_1(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$

b) $f_2(x) = 5(3)^{-2x-8} - 1$

c) $f_3(x) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

11- Soit une fonction exponentielle dont la règle est donnée sous la forme canonique $f(x) = ac^{x-h} + k$. Selon cette règle, indique si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

a) Seule la valeur du paramètre k influence la position de l'asymptote.

b) Si la valeur de a est négative, alors la fonction est décroissante.

c) La fonction f possède un extremum dont la valeur correspond à celle de k .

d) L'asymptote à la courbe de la fonction réciproque est verticale.

12- Trouver les zéros des fonctions suivantes sans les logarithmes.

a) $f(x) = 3(2)^{3x-3} - 96$

b) $f(x) = 4(3)^{x+5} - 4$

13- Résoudre les équations suivantes sans les logarithmes.

a) $375 = 3\left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1}$

b) $-3e^{2x-1} + 3 = 0$

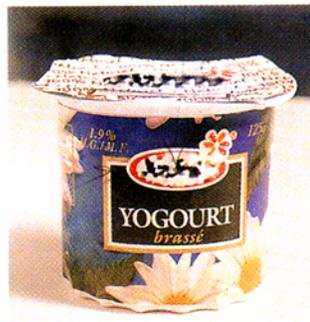
c) $3^{2x+1} \cdot 9^{x+2} = \frac{1}{81}$

d) $\frac{8^{2x}}{4^{2x-1}} = 16^x$

14- Tracer le graphique de la fonction suivante : $f(x) = -2e^{x+7} - 10$

15- Résoudre l'équation suivante : $e^{2x-3} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-19}$

16- Dans un contenant d'un litre de lait, on compte 500 bactéries par centimètre cube. Si on laisse le lait à une température de 22 °C, ce nombre de bactéries triple toutes les heures. Lorsque le lait contient plus de 20 000 bactéries par centimètre cube, il est considéré comme impropre à la consommation. Dans combien de temps le lait sera-t-il avarié?



17- La dégradation de différents produits dans un site d'enfouissement se traduit par des fonctions exponentielles où P est la masse restante après x années après l'enfouissement. Pour chacun de ces produits trouvez le temps nécessaire à sa dégradation complète :

a) Gomme à mâcher : $P = 2(0,8706)^x - 1$

b) Sac de plastique : $P = 2(0,9985)^x - 1$

b) Pile alcaline : $P = 2(0,9999)^x - 1$

18- La demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié de ses atomes se désintègrent. Voici la demi-vie de deux de ces éléments.

Plutonium 239 : 24 000 ans

Uranium 235 : $7,1 \times 10^8$ ans

Pour chacun des éléments radioactifs suivants, calculez le temps requis pour obtenir 51,25 g de cet élément si sa masse initiale est de 410 g.

19- Collette désire faire fructifier son argent à la banque. Elle veut faire un placement de 3000\$ où le taux d'intérêt annuel est de 4%, composé tous les 4 mois. Dans combien d'années, la valeur de son placement sera de 20 000\$?

20- Dans le cadre d'une expérience de laboratoire, on étudie l'extinction d'une espèce particulière de grenouilles. Au départ, il y a 2000 grenouilles heureuses. On remarque que le nombre diminue de 10 % à tous les 7 jours. Après combien de jours, pourra-t-on dénombrier une seule grenouille?

21- Yvon Fairfallitte désire acheter une *Audi R8* au montant de 78 000\$, il possède présentement 1800\$. Comme il ne possède évidemment pas l'argent pour effectuer l'achat, il décide de faire un placement afin d'obtenir la somme nécessaire. Le taux d'intérêt en vigueur est de 2,4% annuellement, dans combien d'années pourra-t-il acheter son rêve si les intérêts sont capitalisés tous les 6 mois?

22- Trouver les zéros des fonctions suivantes

a) $y = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} + 14$

b) $y = 5(3)^{2x-6} - 20$

c) $y = 3e^{5x-2} - 19$

23- Vrai ou Faux ?

a) Un logarithme peut être négatif?

b) L'argument d'un logarithme peut être négatif ?

24-

Écris chacune des expressions numériques suivantes en utilisant un seul logarithme.

a) $\log_2 5 + \log_2 8$ **b)** $\log_4 45 - \log_4 3$ **c)** $\ln 7 + \ln 8 - \ln 4$
d) $2 \log 25 - 3 \log 5$ **e)** $\log_2 0,5 + \log_2 4 + 3 \log_2 3$ **f)** $\frac{\log_2 9}{\log_2 10} - \log 3$

25- Écrire à l'aide d'un seul logarithme :

a) $\log(x+2) + \log 4 - 2 \log x$ **b)** $\log_a t - 2 \log_a 3t + 3 \log_a 2t$

26-

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\log_2 4 + \log_2 8 = 5$ **b)** $\log_5 16 - \log_5 2 = \log_5 8$ **c)** $\log_3 8 = 3 \log_3 2$
d) $\log_5 \left(\frac{8}{13} \right) = \frac{\log_5 8}{\log_5 13}$ **e)** $\log(4 + 11) = \log 4 \cdot \log 11$ **f)** $\frac{\log_c 7}{\log_c 12} = \log_7 12$
g) $\log_c \left(\frac{3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \log_c 3$ **h)** $\log 6 - 4 \log 2 = \log \left(\frac{6}{2} \right)$ **i)** $\log(2,5^3)^2 = 6 \log 2,5$

27- Trouver le zéro de la fonction logarithme suivante : $h(x) - 3 \log_{1/2}(0,5x+0,5) - 6$

28- Tracer l'esquisse et trouver les zéros des fonctions suivantes

a) $f(x) = -4 \log_{1/3}(-2x + 4) - 12$

b) $g(x) = -2 \log_3(4x) + 6$

29- Vrai ou Faux ?

- a)** Seule la valeur du paramètre h influence la position de l'asymptote.
- b)** Si la base $c \in]0,1[$, alors la fonction est automatiquement décroissante.
- c)** Une fonction logarithme possède toujours un zéro.
- d)** Une fonction logarithme possède toujours une ordonnée à l'origine.
- e)** Le domaine de f est $]-\infty, h[$ ou $]h, +\infty[$ est son image est \mathbb{R}

30- Résoudre les équations logarithmiques suivantes en tenant compte des restrictions de chacune.

a) $\log_3 x + \log_3 2 = 4$ **b)** $3 \log(0,5x+2)^2 - 1 = 5$ **c)** $\log_6(x+3) + \log_6(x-2) = 1$

d) $\log_7(14x) = \log_7(x-5) + 2$

31- Trouver la règle de la réciproque de :

a) $y = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 7$ b) $y = 3\ln(x+2) - 5$

32- Résoudre les équations suivantes :

a) $4^{3-2x} = 5^{3x}$

b) $\frac{3^{x+1}}{6^{4x+5}} = 2^x$

c) $2^{x-1} = 5 \cdot 7^{3x}$

d) $3^{x+5} \cdot 2^{3x-1} = 5^{-2x+6}$

e) $2,5 \cdot 10^x = 6 \cdot e^{4x-3}$

33- Réduisez les expressions suivantes :

a) $\frac{(xy^{-1})^{-2}}{xy^2}$

b) $\left(\frac{2x^{-3}y^{-2}}{x^2y^{-1}}\right)^{-1}$

c) $\frac{x^{24}}{\sqrt{x^{16}}}$

d) $\frac{(4x^6y^{-2})^{1/2}}{x^5}$

34- Résoudre : $32^x = 64^{2-x}$

35- Trouver les zéros sans les log de :

a) $f(x) = 4 \cdot 3^{x-6} - 324$

b) $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{5-x} - 686$

36- Trouver la règle de la réciproque de : $y = -4 \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} + 7$

37- Réécrivez l'expression exponentielle suivante sous la forme logarithmique : $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

38- Réécrivez l'expression logarithmique suivante sous la forme exponentielle : $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

39- Évaluez l'expression suivante sans calculatrice : $\log_2 32$

40- Trouver la valeur de la base c dans l'équation suivante : $\log_c 64 = 3$

41- Écrivez en un seul logarithme :

a) $3 \log_2 a + \log_2 a^5$

b) $4 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1)$

c) $2 \log_3 a + \log_3 b - \log_3 c$

42- Résoudre :

a) $\log_2(7 - x) + 3 = \log_2(4x + 5)$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = -1$