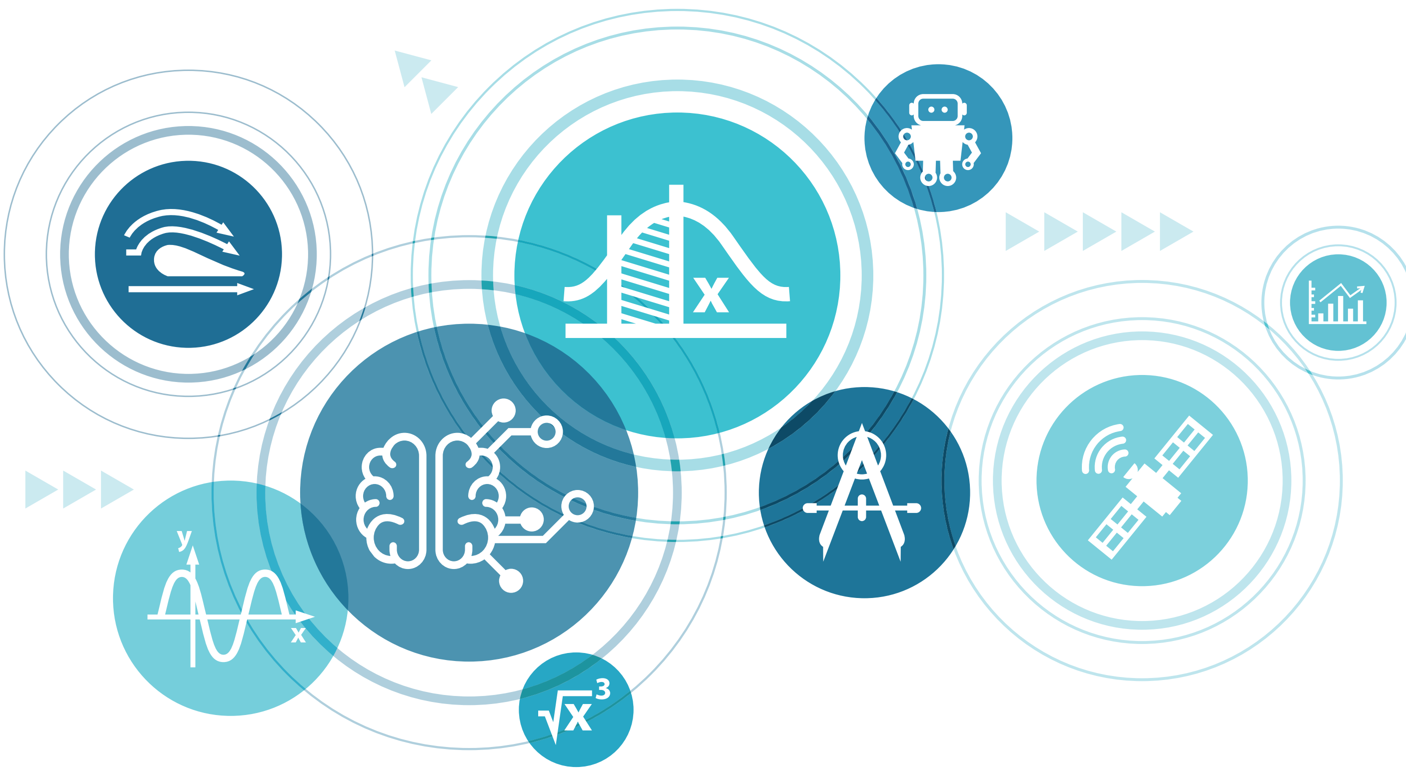
CALCUL DIFFÉRENTIEL

(Calcul 1)

Version 2.3



Pascal Bourdeau

Table des matières

Édition 2.3

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux élèves de 5$^{\text{ème}}$ sec. SN au volet international désireux d'obtenir une bonne base dans le cours calcul différentiel 1 du cégep. Avec ce document vous serez en mesure de comprendre les concepts de **limite** et de **dérivée**. J'espère, que tout comme moi, vous trouverez que le calcul différentiel et intégral est, parmi toutes les branches des mathématiques, la plus stupéfiante et captivante de toutes.

N.B. Il est à noter que la lettre « m » est celle utilisée pour représenter le taux de variation et non la lettre usuelle « a ». Parfois j'utilise le terme pente, vous comprendrez qu'il désigne bien-sûr le taux de variation.

À *Pierre Parent*, un modèle d'enseignant et
à tous mes élèves qui font qu'enseigner
demeure le plus beau métier et aussi
pour toutes ces petites erreurs
que vous avez trouvées.

Chapitre 1 : Le Domaine

> Définition : Domaine d'une fonction : Ensemble des « x » atteint par une fonction.

<u>Exemple 1.1</u>

$f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ alors dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
(« x » peut prendre n'importe quelle valeur sauf 1, car si x = 1 on divisera par 0)

<u>Exemple 1.2</u>

$f(x) = \sqrt{x+5}$ alors dom f = [-5,+ ∞
(car x+5 $\geq$ 0 => x $\geq$ -5)

Exercices 1.1

Trouver le domaine des fonctions ci-dessous.

a) f(x) = $\frac{15}{x^2-9}$

b) f(x) = $\frac{x-9}{x^2+1}$

c) f(x) = $\sqrt{2x-6}$

d) $f(x)$ = $\sqrt{2x-10}$ + $\sqrt{12-3x}$

Chapitre 2 : Fonction définie par parties

> Définition : Une fonction définie par parties est une fonction dont la loi de correspondance diffère selon les valeurs de « x »

Exemple 2.1

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \ \boldsymbol{si}\ x < 0 \\ 4 \quad \boldsymbol{si}\ 0 < x \leq 2 \\ 3x + 5\ \boldsymbol{si}\ x > 3 \end{cases}$

Évaluer

a) $f(0) = \emptyset$ car x = 0 ne correspond à aucune demande de restrictions.

b) $f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17$, car -4 correspond à la restriction attitrée à x < 0.

c) $f(2) = 4$, 2 correspond à la restriction attittrée à $0 < x \leq 2$.

d) $f(5) = 3(5) + 5 = 20$ car 5 correspond à la restriction attitrée à x > 3.

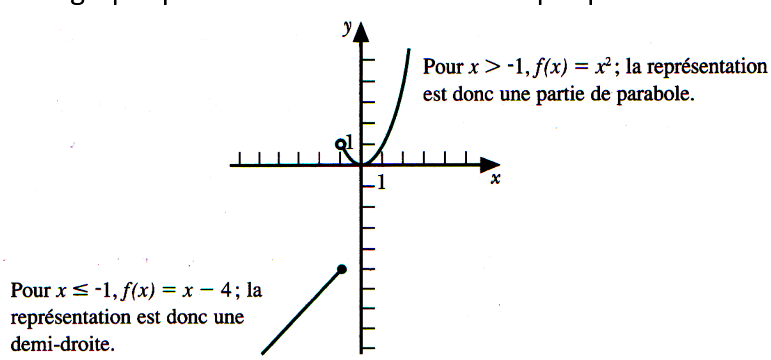
> Définition : Le domaine d'une fonction définie par parties est la réunion des domaines de chaque sous fonction considérée uniquement sous son intervalle de définition.

Exemple 2.2

$f(x) = \begin{cases} x - 4\ \boldsymbol{si}\ x \leq -1 \\ x^2 \quad \boldsymbol{si}\ x > -1 \end{cases}$

Le domaine de cette fonction est tout simplement la réunion des deux restrictions $x \leq -1\ et\ x > -1$ donc dom f = $-\infty, -1] \cup]-1, +\infty$

La représentation graphique de cette fonction définie par partie est :



Exemple 2.3

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{4}{x+5} & \boldsymbol{si}\ x < 0 \\ \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4} & \boldsymbol{si}\ x > 0 \end{cases}$$

Si x < 0 alors $f(\mathrm{x}) = \frac{4}{x+5}$ son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

Si x > 0 alors $f(\mathrm{x}) = \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = \frac{2x+3}{(x-1)(x-4)}$ son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1,4\}$

Donc le domaine « final » de la fonction définie par partie est la réunion de ces deux domaines $\mathbb{R} \setminus \{-5,0,1,4\}$ (0 aussi car selon les deux restrictions $x < 0\ et\ x > 0$, la valeur de x ne peut pas être nulle)

Exercices 2.1

Soit :

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -2x+1\ si\ x < -1 \\ -2 \qquad si\ x = -1 \\ x^2 - 9\ si\ x > 2 \end{cases}$$

Calculer :

a) f(-1) b) f(-3) c) f(2) d) f(3)

Exercices 2.2

Déterminer le domaine des fonctions suivantes

a) $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2 - 1\ \boldsymbol{si} - 4 < x < 5 \\ 4\ \boldsymbol{si}\ x = 5 \\ 21x + 3\ \boldsymbol{si}\ x \geq 6 \end{cases}$

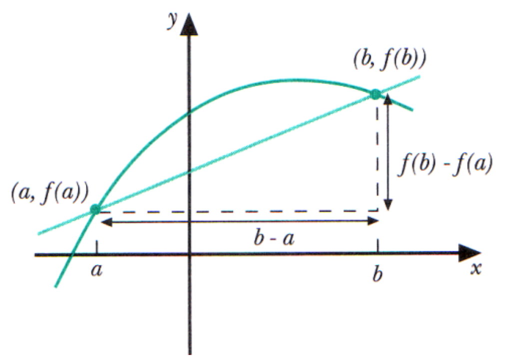
b) $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{-3}{x(x^2-1)}\ \boldsymbol{si}\ x \leq 0 \\ \sqrt{x-1}\ \boldsymbol{si}\ x > 0 \end{cases}$

c) $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 4x\ si\ x < 0 \\ \frac{2}{x-3}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$

Chapitre 3 : Taux de variation

Notion 3.1 Taux de variation moyen (vitesse moyenne)

> Définition : Le taux de variation moyen d'une fonction *f* sur un intervalle [a,b] est noté $TVM_{[a,b]}$,
> Est défini par $TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. (Autrement dit le TVM est la pente d'une sécante passant par les 2 points (a,*f*(a)), (b,*f*(b)).)

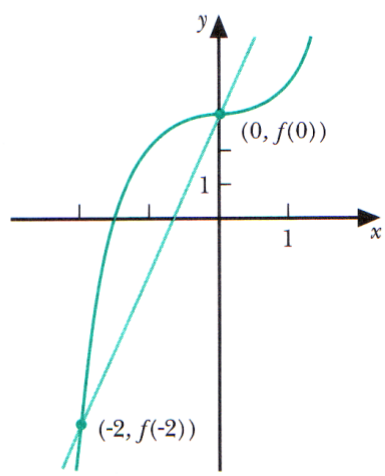


Exemple 3.1

Soit $f(x) = x^3 + 3$

Calculons le $TVM_{[-2,0]}$ et représentons la courbe ainsi que la sécante correspondante.

$$TVM_{[-2,0]} = \frac{f(0) - f(-2)}{0-(-2)} = \frac{3-(-5)}{2} = 4$$



La pente de la sécante passant par les points (-2, *f*(-2)) et (0, *f*(0)) est égale à 4.

Le taux de variation moyen (pente de la sécante) correspond aussi à la vitesse moyenne (Comme en physique avec M. Houle.)

__Exemple 3.2__

La position *s* d'un mobile en chute libre, par rapport à son point de départ, en fonction du temps *t* est donnée par $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où g = 9,8 m/s^2 et *t* est en secondes.

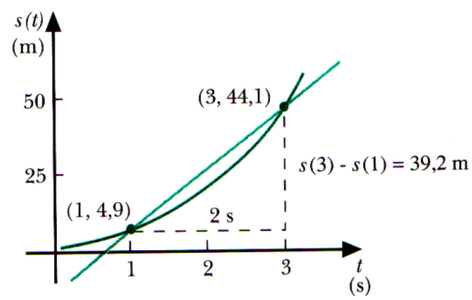
Calculons la vitesse moyenne ($TVM_{[1,3]}$) de ce mobile entre 1s et 3 s.

$v_{[1s,3s]} = \frac{s(3) - s(1)}{3-1}$, car la position est donnée par *s*(t)

$= \frac{44,1\ m - 4,9\ m}{3\ s - 1\ s}$, car $s(t) = 4,9t^2$

$= \frac{39,2\ m}{2\ s}$ = 19,6 m/s.

Donc, la vitesse moyenne entre 1 s et 3 s est de 19,6 m/s.



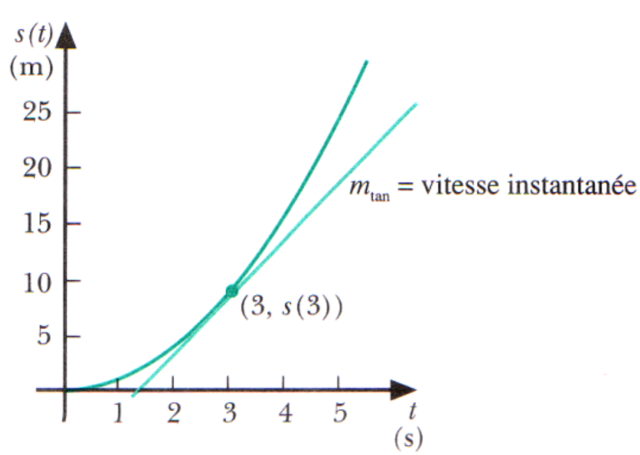
Notion 3.2 Pente de la tangente (vitesse instantanée)

Définition : Une tangente est une droite sécante qui touche en un seul point de la courbe.

__Exemple 3.3__

Soit un mobile dont la position *s* en fonction du temps *t* est donnée par la règle $s(t) = t^2$

Nous désirons, par cet exemple, calculer la vitesse du mobile au temps *t* = 3 s. Cette vitesse est appelée une *vitesse instantanée* qui correspond à la pente de la tangente à 3 s.



Cependant pour calculer cette vitesse instantanée qui provient d'une pente, il est nécessaire de calculer cette pente à partir de deux points. (Donc d'abord à partir d'une sécante qui tend à devenir la tangente à la courbe à 3 s.) Voici ce que je veux dire :

Pour trouver cette vitesse instantanée, nous devons d'abord calculer la vitesse moyenne du mobile sur des intervalles [3 s, *t* s], <u>où nous choisirons *t* de plus en plus près de 3 s, afin de s'approcher de plus en plus de la pente de la tangente à 3 s.</u>

Calculons la vitesse moyenne sur les intervalles de temps suivants :

a) $v_{[3\text{ s},\, 5\text{ s}]} = \frac{s(5) - s(3)}{5-3} = \frac{25\ m - 9\ m}{2\ s} = \frac{16\ m}{2\ s} = 8$ m/s

b) $v_{[3\text{ s},\, 4\text{ s}]} = \frac{s(4) - s(3)}{4-3} = \frac{16\ m - 9\ m}{1\ s} = 7$ m/s

c) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}5\text{ s}]} = \frac{s(3{,}5) - s(3)}{3{,}5-3} = \frac{12{,}25\ m - 9\ m}{0{,}5\ s} = 6{,}5$ m/s

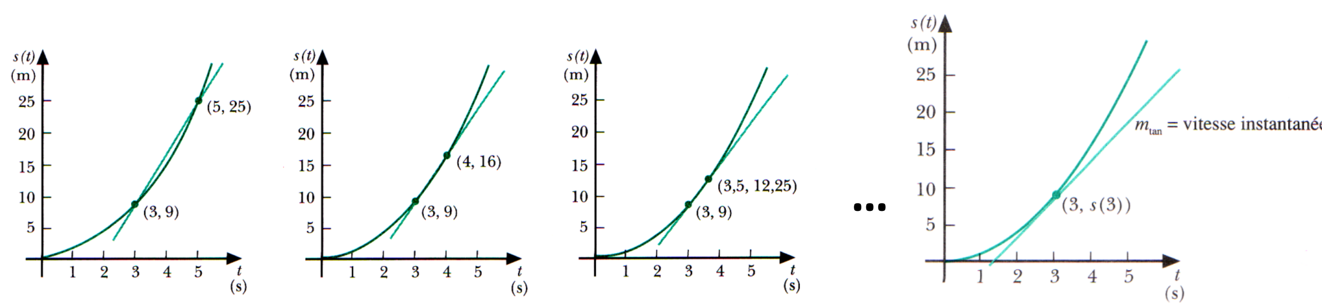
d) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}1\text{ s}]} = \frac{s(3{,}1) - s(3)}{3{,}1-3} = \frac{9{,}61\ m - 9\ m}{0{,}1\ s} = 6{,}1$ m/s

d) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}001\text{ s}]} = \frac{s(3{,}001) - s(3)}{3{,}001-3} = \frac{9{,}006001\ m - 9\ m}{0{,}001\ s} = 6{,}001$ m/s

On peut facilement constater qu'à ***la limite*** la vitesse moyenne s'approche de 6 m/s.

Voici une représentation des vitesses moyennes calculées en a), b) et c)

Chaque graphique représente les sécantes données, et comme nous l'avons vu précédemment la pente de ces sécantes correspond à la vitesse moyenne sur l'intervalle [3 s, *t* s]



Pente de la sécante 8 m/s **Pente de la sécante 7 m/s** **Pente de la sécante 6,5 m/s** **…** **Pente de la tangente 6 m/s**

Nous remarquons que, <u>*à la limite*</u>, plus la deuxième borne de l'intervalle tend vers 3, plus la sécante devient une tangente à la courbe au point (3, s(3)) ou (3, 9) **dont la pente s'approche <u>*à la limite*</u> de 6 m/s.**

Ce 6 m/s est appelée la vitesse instantanée et elle correspond à la pente de la tangente au point (3, 9). On verra **plus tard** que cette vitesse instantanée à 3 s. ou pente de la tangente à 3 s. correspond à la **dérivée de la fonction s(t) = t^2 évaluée lorsque t = 3 s. (** $s'(t) = 2t$ et si t = 3 $s'(3) = 2(3) = 6$) **)**

Exercices 3.1

La position *s* (en m) d'un mobile en fonction du temps *t* (en s) est donnée par $s(t) = t^2 + 2t$

a) Calculer la vitesse moyenne de ce mobile sur l'intervalle [1s, 4s].

b) Calculer, *à la limite*, la vitesse instantanée du mobile à t = 5 s. en considérant 4 intervalles.

c) Que représente cette vitesse instantanée graphiquement?

Exercices 3.2

La position *s* (en m) d'un mobile en fonction du temps *t* (en s) est donnée par la règle

$s(t) = 2t^2 – 2$

a) Calculer, à la limite, la vitesse instantanée du mobile à t = 2 s en considérant 4 intervalles.

b) Que représente cette vitesse instantanée graphiquement?

Chapitre 4 : Les limites

Le concept de limite nous sert à décrire ce qui se produit avec la valeur de *f*(x) lorsque nous utilisons une valeur de x qui est non définie. Pour ce faire, nous prenons des valeurs de x qui voisinent x.

Exemple 4.1

Soit *f*(x) = $\frac{x^3-3x^2}{x-3}$ où le dom *f* = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Comme *f*(3), est non définie, car si x = 3 le dénominateur est nul, voyons ce qui se produit par contre lorsque les valeurs de x sont voisines de 3.

Valeurs voisines de 3 signifie:

- Lorsque les valeurs de x sont plus petites que 3 et s'approchant de 3 ($x \to 3^-$)

ou

- Lorsque les valeurs de x sont plus grandes que 3 et s'approchant de 3 ($x \to 3^+$)

Autrement dit, la valeur de x n'égale jamais exactement 3.

Trouvons maintenant les valeurs de *f*(x) correspondantes lorsque $x \to 3^-$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	… $\to 3^-$
f(x)	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001	… $\to 9$

Nous remarquons assez aisément que les valeurs de f(x) tendent vers 9 lorsque x tend vers 3^-

Nous écrivons :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9 \quad ou \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = 9$$

Trouvons maintenant les valeurs de *f*(x) correspondantes lorsque $x \to 3^+$

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	… $\to 3^+$
f(x)	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001	… $\to 9$

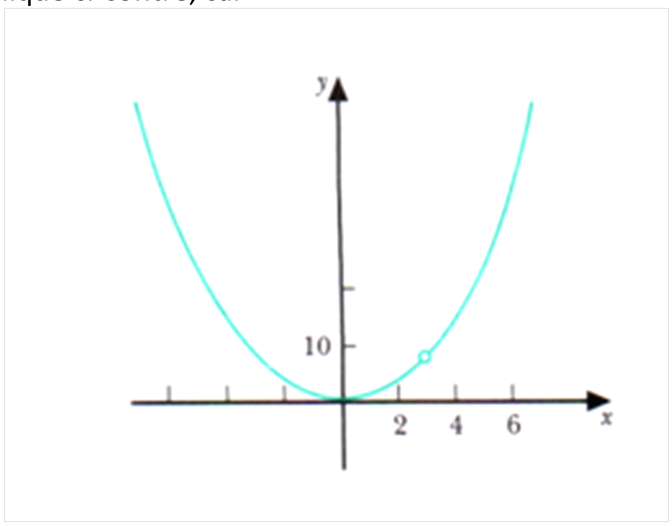
Nous remarquons assez aisément, encore une fois, que les valeurs de f(x) tendent vers 9 lorsque x tend vers 3^+.

Finalement peu importe les valeurs de x s'approchant de 3 par la gauche ($x \to 3^-$) ou par la droite ($x \to 3^+$), *f*(x) s'approche de 9. Nous écrivons donc :

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

La fonction f est représentée par le graphique ci-contre, car

f(x) = $\frac{x^3-3x^2}{x-3} = \frac{x^2(x-3)}{x-3}$ = x^2 si $x \neq 3$



Exercices 4.1

Soit *f*(x) = $\frac{x^4+2x}{x}$ où le dom *f* = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Évaluer} : \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 2x}{x}$$

Exercices 4.2

Soit f(x) = *f*(x) = $\frac{x-5}{x^2-5x}$ où dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$.

$$\text{Évaluer} \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 5x}$$

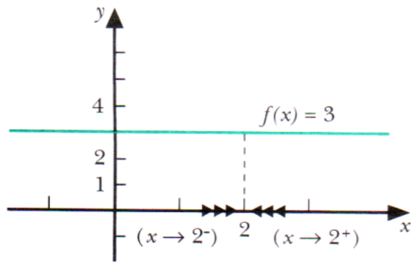
Chapitre 5 : Propositions sur les limites

Il existe 8 propositions sur les limites qui permettent de déterminer les valeurs de celles-ci directement sans faire tendre x vers des valeurs plus petites ou plus grandes à l'aide de tableaux.

Proposition 1: $\lim\limits_{x \to a} K = K$, où K est une constante

Exemple 5.1

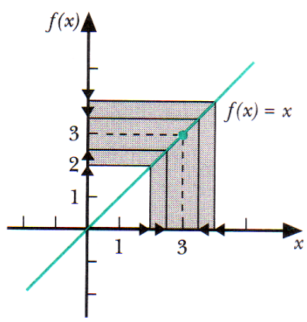
$\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$



Proposition 2: $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{x} = \mathrm{a}$

Exemple 5.2

$\lim\limits_{x \to 3} \mathrm{x} = 3$



Proposition 3: Si $\lim\limits_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$, alors

$$\lim_{x \to a} [\mathrm{K}f(\mathrm{x})] = \mathrm{K} \lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{a}} f(\mathrm{x}) = \mathrm{KL} \quad \text{si } \mathrm{K} \in \mathbb{R}$$

Exemple 5.2

$\lim\limits_{x \to 8} 3\mathrm{x} = 3 \lim\limits_{\mathrm{x} \to 8} \mathrm{x}$ (Proposition 3)

= 3 x 8 (Proposition 2)

= 24

Addition et soustraction

Proposition 4 : $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = M$, alors

$$\lim_{x\to a} [f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x})] = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} f(\mathrm{x}) + \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = L + M$$

Notez que la proposition 4 fonctionne aussi avec une différence :

$$\lim_{x\to a} [f(\mathrm{x}) - g(\mathrm{x})] = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} f(\mathrm{x}) - \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = L - M$$

En résumé, la limite d'une somme est égale à la somme des limites et la limite d'une différence est égale à la différence des limites.

<u>Exemple 5.3</u>

$$\lim_{x\to 1}(\mathrm{x} + 7) = \lim_{\mathrm{x}\to 1} \mathrm{x} + \lim_{\mathrm{x}\to 1} 7 \quad (\text{Proposition } 4)$$

= 1 + 7 (Proposition 2 et 1)

= 8

<u>Exemple 5.4</u>

$$\lim_{x\to 4}(6\mathrm{x} - 5) = \lim_{\mathrm{x}\to 4} 6\mathrm{x} - \lim_{\mathrm{x}\to 4} 5 \quad (\text{Proposition } 4)$$

$$6 \lim_{x\to 4} \mathrm{x} - 5 \ (\text{Propositions 3 et 1})$$

= 6 x 4 – 5 (Proposition 2)

= 19

Produit

Proposition 5 : $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = M$, alors

$$\lim_{x\to a} [f(\mathrm{x})\ g(\mathrm{x})] = (\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} f(\mathrm{x}))\ \mathrm{x}\ (\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} g(\mathrm{x})) = L\mathrm{x}M$$

En résumé, la limite d'un produit est égale au produit des limites.

<u>Exemple 5.5</u>

$$\lim_{x\to 2}(2x - 1)(3x + 5) = (\lim_{x\to 2}(2x - 1))\ \mathrm{x}\ (\lim_{x\to 2}(3x + 5)) \qquad \text{Proposition 5}$$

$$(\lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1)\ \mathrm{x}\ (\lim_{x\to 2} 3x + (\lim_{x\to 2} 5) \qquad \text{Proposition 4}$$

$= (2 \lim_{x \to 2} x - 1) \text{ x } (3 \lim_{x \to 2} x + 5) \; propositions \; 3 \; et \; 1$

= (2x2 – 1) x (3x2 + 5)   Proposition 2

= 3 x 11

= 33

Exposants

$\mathbf{Proposition\ 6:}\ \lim_{x \to a} \mathbf{x^n} = \boldsymbol{a^n}$ **où n** $\in \mathbb{R}$

Exemple 5.6

$$\lim_{x \to 6} x^3 = 6^3 = 216$$

Quotient

Proposition 7 : $\lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$, alors $$\lim_{x \to a} [\frac{f(\mathbf{x})}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \; si \; M \neq 0$$

En résumé, la limite d'un quotient est égale au quotient des limites.

Exemple 5.7

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{4x - 1} =$$

$$\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - 4x^2 + 3}{\lim_{x \to 2} 4x - 1} = \qquad proposition \; 7$$

$$\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - \lim_{x \to 2} 4x^2 + \lim_{x \to 2} 3}{\lim_{x \to 2} 4x - \lim_{x \to 2} 1} = \qquad proposition \; 4$$

$$\frac{2^3 - 4 \lim_{x \to 2} x^2 + 3}{4 \lim_{x \to 2} x - 1} = \qquad propositions \; 6, 3 \; et \; 1$$

$$\frac{2^3 - 4\mathrm{x}2^2 + 3}{4\mathrm{x}2 - 1} = \qquad proposition \; 6 \; et \; 2$$

$= \frac{-5}{7}$

Proposition 8 : $\lim\limits_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$, alors

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^r = [L]^r \ \textit{où}\ r > 0$$

En résumé, l'exposant *r* s'attribue à l'ensemble de la limite.

Exemple 5.8

$\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1)^4 =$

$\left[\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1)\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 8$

$\left[\lim\limits_{x \to 3} 2x + \lim\limits_{x \to 3} 1\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 4$

$\left[2 \lim\limits_{x \to 3} x + 1\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 3\ et\ 1$

$[2\mathrm{x}3 + 1]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 2$

2401

Exercices 5.1

Évaluer à l'aide des propositions les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{5x^2 + 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} [(7x - 3)(4x^2 - 1)]$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right)^3$

Chapitre 6 : Indétermination de la forme $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Comme nous venons de le constater à plusieurs reprises, les propositions sur les limites nous révèlent que, pour évaluer une limite : $\lim_{x \to a} f(x)$, il semble suffisant de remplacer x par a dans la fonction f(x) donnée.

Par contre, il existe plusieurs cas où cette méthode n'est pas appropriée : par exemple lorsque dans le quotient, la limite du numérateur est égale à 0 et la limite du dénominateur est égale à 0. Nous appelons ce cas, une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

<u>Exemple 6.1</u>

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \; est\ une\ indétermination\ de\ la\ forme\ \frac{0}{0}$$

Cependant nous pouvons lever cette indétermination en appliquant la limite lorsque x→ 4^{-}et lorsque x → 4^{+}

x	3,9	3,99	3,999	3,9999	… → 4^{-}
f(x)	7,9	7,99	7,999	7,9999	… → 8

x	4,1	4,01	4,001	4,0001	… → 4^{+}
f(x)	8,1	8,01	8,001	8,0001	… → 8

Nous pouvons remarquer que nous avons levé l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, car

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$$

Cependant voici un moyen beaucoup plus simple (que de faire des tableaux) : la factorisation du numérateur et dénominateur!

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} x + 4 = \mathbf{8}, \qquad si\ x - 4 \neq 0$$

Exercices 6.1

Évaluer :

a) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 5x}{x - 1}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{2x + 4}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + x - 10}$

Il existe d'autres méthodes, autres que la factorisation, afin d'éliminer une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Ces autres méthodes sont des remaniements des expressions rationnelles (mettre sur le même dénominateur ou à l'aide du conjugué.)

Voici qu'est-ce qu'on entend par la notion de **conjugué** :

Le conjugué de A **+** B est : A **–** B

Le conjugué de A **–** B est : A **+** B

Par exemple, le conjugué de $\sqrt{x} - 5$ *est* $\sqrt{x} + 5$

À l'origine le conjugué servait à éliminer la radical d'une expression, par conséquent si on multiplie $\sqrt{x} - 5$ par son conjugué : $\sqrt{x} + 5$ nous obtenons :

$(\sqrt{x} - 5)\ x\ (\sqrt{x} + 5)$ = $x + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 25 = x - 25.$

Le conjugué servira, comme vous le verrez dans quelques instants, à évaluer une limite avec une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

<u>Exemple 6.2</u>

Évaluons :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}\ est\ une\ indétermination\ de\ la\ forme\ \frac{0}{0}$$

Pour lever cette indétermination il faut soustraire les expressions au numérateur en retrouvant leur même dénominateur :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3}\ \textit{dénominateur commun}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3x(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{3x(x-3)}\ \textit{mise en évidence simple de} -1 \textit{ au numérateur}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{3x}\ \textit{car } x-3\ \neq 0$$

$$=\frac{-1}{9}\ \textit{en évaluant la limite}$$

<u>Exemple 6.3</u>

Évaluons :

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}\ \text{x}\ \frac{3+\sqrt{\text{x}}}{3+\sqrt{\text{x}}}\ \text{en multipliant le numérateur et le dénominateur}$$

par le **conjugu**é du numérateur.

$$=\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \text{en effectuant}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-(x-9)}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \textit{mise en évidence simple de} -1 \textit{ au numérateur}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \textit{en simplifiant car } x-9\neq 0$$

$$=\frac{-1}{3+\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}\ \textit{en évaluant la limite}$$

Exemple 6.4 qui tue…

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x^2-16}$$

On remarque que nous avons encore l'indétermination mathématique $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^2-16}\ \textit{mettre sur le même dénominateur}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ \frac{2+\sqrt{x}}{2+\ \sqrt{x}}}{x^2-16}\ \textit{utilisation du conjugué au numérateur}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{4-x}{4\sqrt{x}+2x}}{x^2-16}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1(x-4)}{4\sqrt{x}+2x}}{(x-4)(x+4)}$$

$\textit{au numérateur}:\ -1\ \textit{en mise en évidence simple, au dénominateur}: \textit{différence de carrés}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-1(x-4)}{(4\sqrt{x}+2x)(x-4)(x+4)}\ \textit{en effectuant}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{(4\sqrt{x}+2x)(x+4)}\ \textit{simplification car}\ x-4\neq 0$$

$$\frac{-1}{(4\sqrt{4}+2(4))(4+4)}=\frac{-1}{128}\ \textit{en évaluant la limite}$$

Exercices 6.2

Évaluer :

a)$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{1}{x}-1}$

b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-\dfrac{25}{x}}{x-5}$

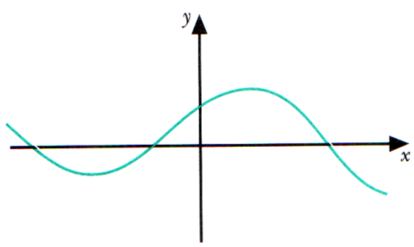
c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)}$

d) $\lim_{x\to 36} \dfrac{36-x}{\sqrt{x}-6}$

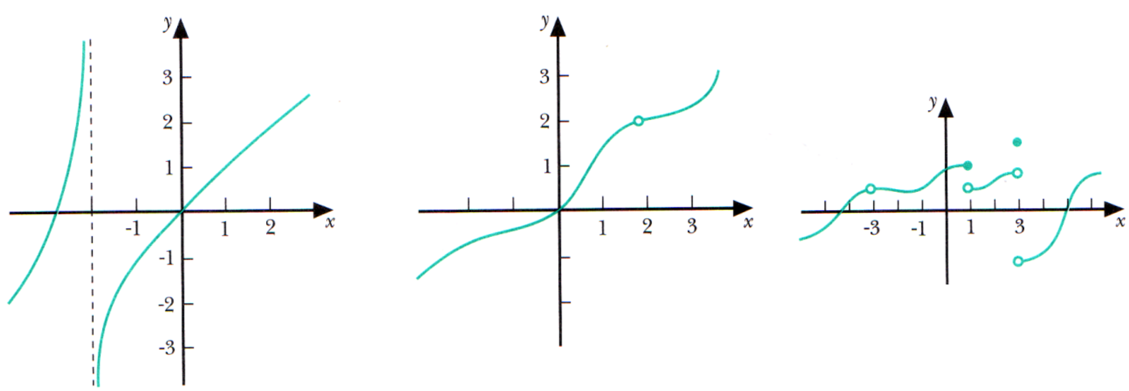
e) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^4-x^4}{h}$

Notion : Continuité de fonction

Dans votre cours de calcul 1 vous terminerez ce chapitre en déterminant si une fonction est continue (courbe se traçant sans lever le crayon) ou discontinue sur un intervalle donné.



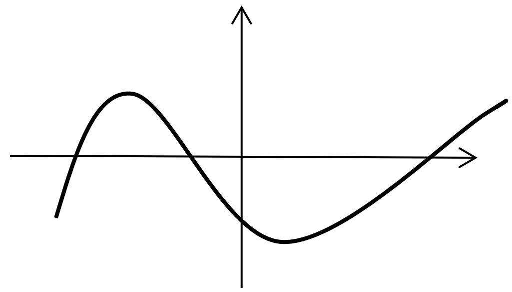
Fonction continue



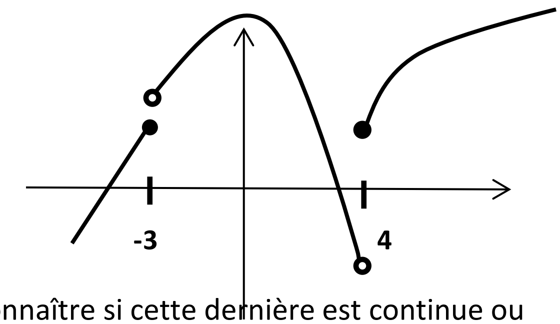
Fonctions discontinues

Définition : Une courbe est dite **continue** lorsqu'elle n'a pas de coupure, autrement dit, nous pouvons la tracer sans lever le crayon.

Le graphique ci-contre représente une fonction continue.



Le graphique ci-contre représente une fonction discontinue en x = -3 et x = 4



Faisons maintenant l'analyse de fonction pour connaître si cette dernière est continue ou discontinue.

Définition : Une fonction est **continue** en *x = a* si et seulement si ces conditions sont respectées :

$\mathbf{1})$ $f(a)$ est définie, c'est-à-dire *a* ∈ dom *f.* (En *x = a* : il n'y a pas une bulle vide ou une asymptote en *x = a*)

$\mathbf{2})\ \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe c'est – à – dire: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

$\mathbf{3})\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

c'est – à – dire la réponse de la condition 2 est la même que celle de la la condition 1.

<u>Exemple 6.5</u>

Soit *f(x)* = $\begin{cases} x + 5 \ \boldsymbol{si}\ x < -1 \\ 4 \quad \boldsymbol{si}\ x = -1 \\ 4x^2 \ \boldsymbol{si}\ x > -1 \end{cases}$

Vérifions si *f(x)* est continue en *x = -1*

1ère condition: *f(-1)* = 4

2ème condition:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x + 5 = 4$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 4x^2 = 4$$

$$Donc, \lim_{x\to -1} f(x) = 4$$

3ème condition : $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

La fonction est donc continue!

<u>Exemple 6.6</u>

Soit *f(x)* = $\begin{cases} \frac{7x^2+1}{4x} \; si \; x < 1 \\ 3x^2 + 2 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$

Vérifions si *f(x)* est continue en *x = 1*

1ère condition: *f(1)* = 5

2ème condition:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{7x^2+1}{4x} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x^2 + 2 = 5$$

$$Donc, \lim_{x\to 1} f(x) \; n'existe \; pas.$$

La 2ème condition n'étant pas respectée la fonction est discontinue en x = 1

Exercice 6.3

Pour chaque fonction, déterminer si elle est continue aux valeurs de x données.

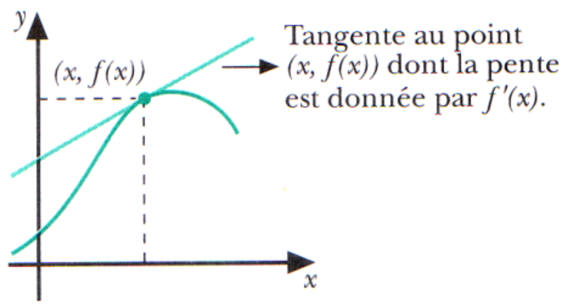
a) En *x = 4* pour *f(x)* = $\begin{cases} 5 \; si \; x < 4 \\ 6 \; si \; x = 4 \\ \frac{x^2-1}{x-1} \; si \; x > 4 \end{cases}$

b) En *x = 2* pour *f(x)* = $\begin{cases} 2x \; si \; x < 1 \\ 5 \; si \; x = 1 \\ x^2 + 1 \; si \; 1 < x < 2 \\ 5 \; si \; x = 2 \\ 7 - x \; si \; x > 2 \end{cases}$

Chapitre 7 : La dérivée (point de vue général)

Définition : On appelle la ***dérivée*** d'une fonction le taux de variation instantanée TVI (qui correspond à la vitesse instantanée d'un mobile).

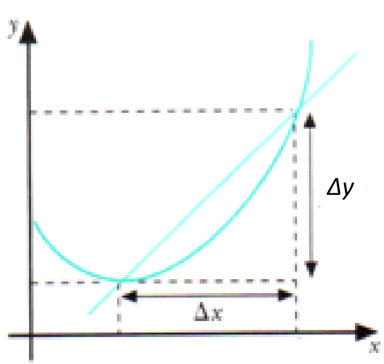
Graphiquement la **dérivée**, notée $f'(x)$, correspond à la pente de la tangente à la courbe de f au point (x, f(x)).



Décortiquons le concept de dérivée un peu plus…

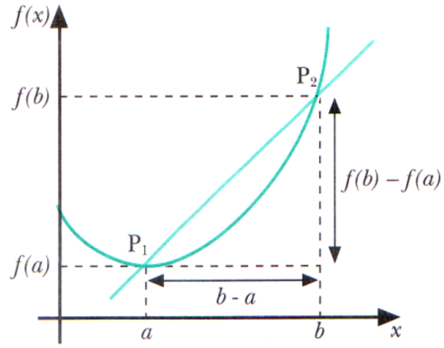
Comme la dérivée est un taux de variation, plus précisément un taux de variation d'une tangente en un point d'une courbe, la dérivée est désignée par un remaniement de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{2-y_1}}{x_{2-x_1}}$

Commençons, afin de trouver la formule de la dérivée, en revoyant ensemble le taux de variation moyen (TVM) tel que vu lors du chapitre 3.



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Taux\ de\ Variation\ Moyen$ d'une sécante (TVM)

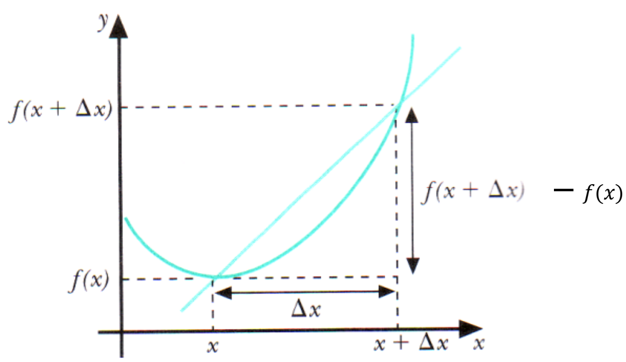
En changeant le symbolisme lié au point P_1 et P_2

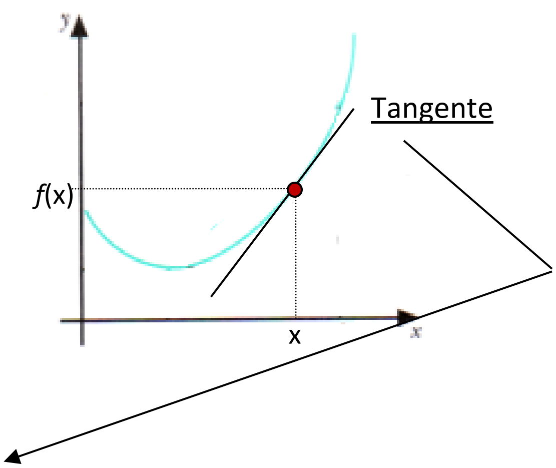


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = TVM_{[a,b]}$$

Cependant, nous désirons trouver le taux de variation d'une tangente (définition de dérivée) et non le taux de variation d'une sécante.

On remarque que, pour obtenir graphiquement une tangente; Δx ainsi que Δy ou *f*(x+*Δx*)-*f(*x*)* doivent tendre vers 0. Autrement dit, comme la tangente ne touche la courbe qu'en un seul point, il n'y a pas de Δx et de Δy !!!





$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *de la tangente* $= Taux\ de\ Variation\ Instantanée$(TVI)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\,de\ la\ tangente = \mathbf{TVI} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}} \quad où \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cette formule est ce qu'on appelle la **dérivée**! La dérivée de la fonction *f*(x) est notée ***f'*(x)**

$$\boldsymbol{f}\,'(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

***f'*(x) = dérivée de *f* (x) = pente de la tangente en un point de *f* (x)**

Exemple 7.1

Calculons la dérivée de *f* si *f*(x) = x^2

$$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad par\ définition$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \qquad car\ f(x) = x^2$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \qquad développement$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad mise\ en\ évidence\ simple\ de\ \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) \qquad en\ simplifiant\ car\ \Delta x \neq 0$$

= 2x en évaluant la limite

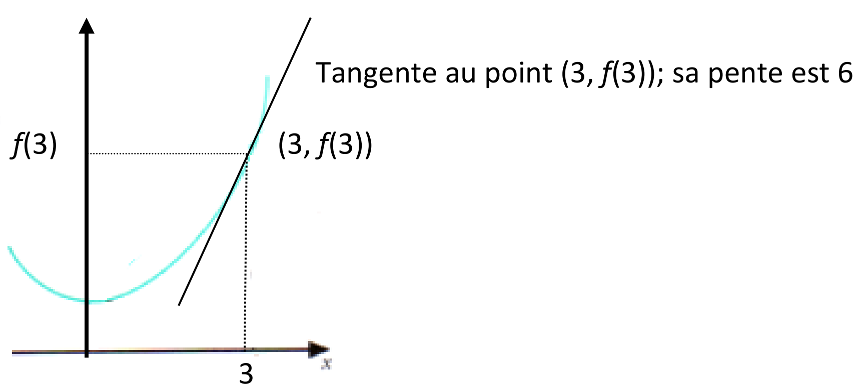
On remarque donc que si *f*(x) = x^2 alors la dérivée *f* '(x) = 2x

Si nous voulons évaluer la dérivée afin de calculer la pente de la tangente à un point spécifique, il suffit d'évaluer la dérivée à la valeur du x du point désiré.

Par exemple, si nous voulons trouver la dérivée (pente de la tangente) lorsque x = 3, il suffit d'évaluer: *f* '(3).

f '(3) = 2(3) = 6, ce qui signifie que la pente de la tangente à la courbe (*f*(x) = x^2) à x = 3 est de 6 !

Graphiquement :



Exercices 7.1

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 8$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$

b) Évaluer la dérivée $f'(5)$

Exercices 7.2

Soit $f(x) = 3x+1$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$

b) Évaluer la dérivée $f'(2)$

Je suis d'avis, tout comme vous je suis certain, que cette façon de trouver la dérivée d'une fonction est loin d'être simple. Vous trouverez, dans le chapitre 8 de ce fascicule des manières (6 propositions) beaucoup plus simples de trouver la dérivée d'une fonction.

Chapitre 8 : Dérivée de fonctions

Comme vous avez pu le voir il est assez complexe de trouver la dérivée d'une fonction en employant toujours : $f\,'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Il existe une méthode beaucoup plus rapide, et surtout beaucoup plus simple de trouver la dérivée d'une fonction.

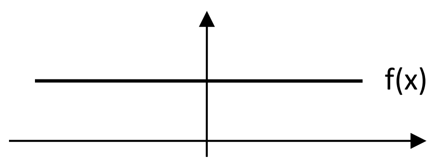
Il existe 15 propositions afin de trouver des dérivées de fonctions vraiment plus rapidement.
En voici 6 d'entre-elles qui les résument en grande partie.

Proposition 1 : Si f(x) = K, alors $f\,'$(x) = 0 (K étant un nombre réel)

Exemple 8.1

Si f(x) = 5, alors $f\,'$(x) = 0

Comme $f\,'$(x) = 0, cela signifie que le taux de variation est toujours nul. C'est évident, car la fonction f(x) = 5 est une variation nulle (Droite horizontale)



Proposition 2 : Si f(x) = x, alors $f\,'$(x) = 1

Cela se comprend, car la pente est toujours de 1 sur la droite f(x) = **1**x

Proposition 3 : Si f(x) = ax^n, alors $f\,'$(x) = nax^{n-1} où n ∈ $\mathbb{R}$

Cette proposition, est pour ma part, la plus utilisée et la plus importante de toute!

Exemple 8.2

a) Si f(x) = $2x^3$, alors $f\,'$(x) = $3(2)x^{3-1} = 6x^2$

b) Si f(x) = 4x, alors $f\,'$(x) = $4x^{1-1} = 4x^0 = 4$

c) Si f(x) = $\sqrt{x}$,

f(x) = $\sqrt{x}$ => f(x) = $x^{1/2}$ alors $f\,'$(x) = $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercices 8.1

Trouver la dérivée de :

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = 4x^{3/2}$

c) $f(x) = 2x^7$

Somme et différence

> ***Proposition 4*** : Si $H(x) = f(x) + g(x)$, alors $H'(x) = f'(x) + g'(x)$

Par cette proposition, on effectue la dérivée de chaque polynôme de la fonction à dériver. Notez que cette proposition fonctionne aussi avec des soustractions de polynômes.

<u>Exemple 8.3</u>

Si $f(x) = 7x + 3$, alors $f'(x) = (7x)' + (3)'$ (Proposition 4)

$= (1)7x^{1-1} + 0$ (Proposition 3)

$= 7$

Produit

> ***Proposition 5*** : Si $H(x) = f(x)\, g(x)$, alors $H'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

<u>Exemple 8.4</u>

Si $f(x) = (x - 2)(2x + 8)$, alors

$f'(x) = (x - 2)'(2x + 8) + (x - 2)(2x + 8)'$ (proposition 5)

$= [(x)' - (2)'] (2x + 8) + (x - 2)[(2x)' + (8)'$ (proposition 4)

$= (1 - 0)(2x + 8) + (x - 2)(2 + 0)$

$= 2x + 8 + 2x - 4$

$= 4x + 4$

Exemple 8.5

Si $f(x) = 15(x^4 - 2x)$, alors

$f'(x) = (15)'(x^4 - 2x) + (15)(x^4 - 2x)'$ (proposition 5)

$= (0)(x^4 - 2x) + (15)[(x^4)' - (2x)']$ (proposition 4)

$= 0 + 15[4x^3 - 2]$

$= 60x^3 - 30$

Dans votre cours de Calcul 1 la proposition 5 pourra être généralisée par la proposition 5'

Proposition 5' : Si $H(x) = f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x)$, alors

$$H'(x) = f'_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)\, f'_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)\, f_2(x)\, f'_3(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f'_n(x)$$

Division

Proposition 6 : Si $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ alors $H'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemple 8.6

Si $f(x) = \frac{x^5}{x^4}$ alors

$f'(x) = \frac{(x^5)'\, x^4 - x^5\, (x^4)'}{(x^4)^2}$ (proposition 6)

$= \frac{(5x^4)\, x^4 - x^5\, (4x^3)}{x^8}$ (proposition 3)

$= \frac{5x^8 - 4x^8}{x^8} = \frac{x^8}{x^8} = 1$

Ceci est pour vous prouver que la proposition 6 fonctionne belle et bien, car nous savions que la dérivée de $f(x) = \frac{x^5}{x^4}$ était de 1, car $f(x) = \frac{x^5}{x^4} = x$ et donc $(x)' = 1$ par la proposition 2, ou

si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$ par la proposition 3…

Exemple 8.7

Si $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ alors

$f'(x) = \frac{(2x)'(x+1) - 2x\,(x+1)'}{(x+1)^2}$ (proposition 6)

$= \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2}$ (propositions 3 et 4)

$= \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$

$= \frac{2}{(x+1)^2}$

Exercices 8.2

Effectuer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -9x$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = 4x^2 + 24x + 10$

d) $f(x) = 3x^{-1} + x^2$

e) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$

f) $f(x) = x^7 - 3x^5 - \frac{x^3}{3} + 1$

g) $f(x) = (2x + 1)(x + 1)$

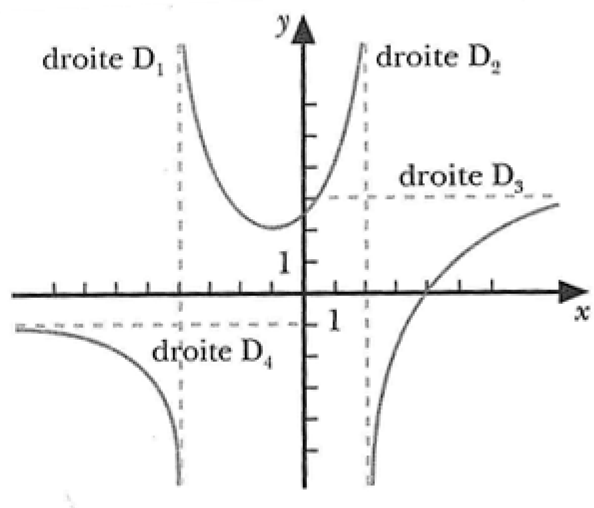
h) $f(x) = \frac{-5}{x^5}$

i) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

j) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 + 7x + 4)$

Chapitre 9: Identifier la position des asymptotes d'une fonction grâce aux limites.

1ère partie asymptote verticale



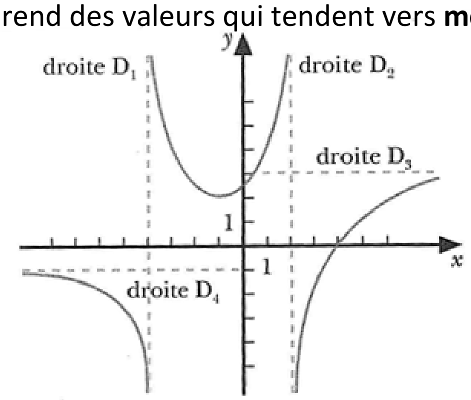
Asymptote verticale :

La fonction *f* est discontinue en x = -4 et x = 2 car il y a présence d'asymptotes verticales à ces endroits (D_1 et D_2).

En analysant bien le graphique, nous remarquons que lorsque les valeurs de x sont de plus en plus près de 2 par la **droite** (2^+), la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite asymptote D_2 et la fonction *f,* (les y), prend des valeurs qui tendent vers **moins l'infini**.

Nous notons ceci

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$



Par contre, nous remarquons aussi que lorsque les valeurs de x sont de plus en plus près de 2 par la **gauche** (2^-), la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite asymptote D_2 et la fonction *f,* (les y), prend des valeurs qui tendent vers **plus l'infini**.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

Par la même façon :

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty \ et \ \lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$$

Grâce à ces constatations nous disons que x = 2 et x = -4 sont des **asymptotes verticales** car les fonctions tendent toujours vers plus l'infini ou moins l'infini à ces deux endroits.

Donc pour qu'une fonction ait une asymptote verticale d'équation x = a, il faut **qu'au moins une** de ces 4 conditions soient respectées :

$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ \boldsymbol{ou} \ \mathbf{2.} \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \ \boldsymbol{ou} \ \mathbf{3.} \ \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \ \boldsymbol{ou}$$

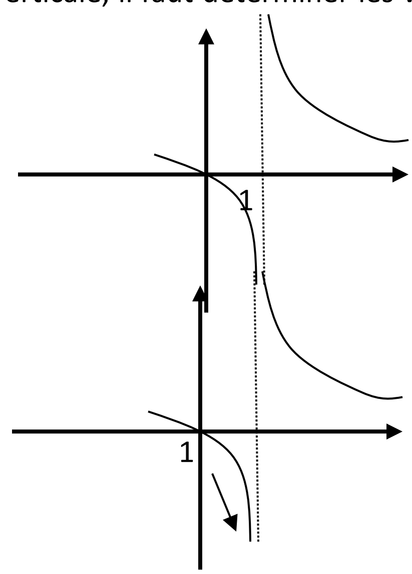
$$\mathbf{4.} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

<u>Exemple 9.1</u>

Pour savoir si une fonction possède une asymptote verticale, il faut déterminer les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

Soit la fonction *f(x)* = $\frac{3x+1}{x-1}$ où sont dom *f* = $\mathbb{R}$/ {1}

Analysons le comportement de *f* près de 1 (1^- et 1^+)



$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{0{,}99999 \ldots - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

donc lorsque la fonction f s'approche de 1 par la gauche, *f* prend des valeurs qui tendent vers $-\infty$.

Il y a donc asymptote verticale en x = 1 car une des 4 conditions est vérifiée. (Condition 4)

Nous pouvons aussi vérifier que :

$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{1{,}00 \ldots 01 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Cela confirme aussi l'asymptote verticale en x = 1 car la condition 1 est vérifiée.

Cependant, il suffisait de vérifier **qu'une** de ces deux limites égales $-\infty$ ou $+\infty$, pour conclure la présence d'une asymptote verticale.

Exercice 9.1

Soit $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-9}$

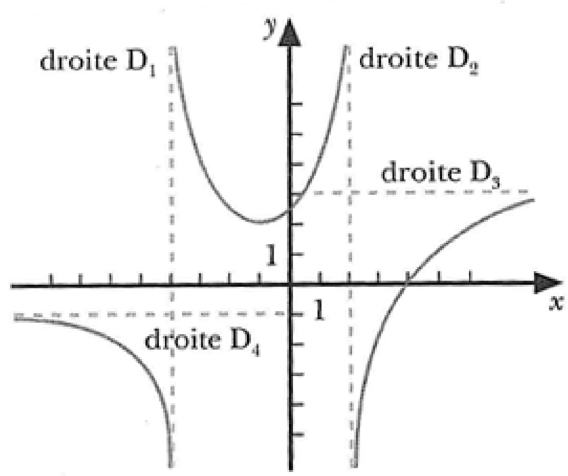
Identifier les asymptotes verticales.

Exercice 9.2

Évaluer la limite suivante afin de reconnaître l'existence ou non d'une asymptote verticale.

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$$

2ème partie asymptote horizontale



Reprenons la fonction *f* et analysons maintenant ce qui se produit aux asymptotes horizontales. Lorsque $x \to -\infty$, la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite D_4, dont l'équation est

y = -1 et la fonction *f* (les y) prend des valeurs de plus en plus près de -1.

Nous notons ceci :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$$

Nous voyons également que lorsque x → $+\infty$, la courbe de f s'approche de plus en plus de la droite D_3, dont l'équation est

y = 3 et la fonction f (les y) prend des valeurs de plus en plus près de 3.

Nous notons ceci :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Grâce à ces constatations nous disons que y = -1 et y = 3 sont des **asymptotes horizontales** car les fonctions tendent toujours vers des valeurs de «y» précises. (-1 et 3 dans cet exemple)

Donc pour qu'une fonction ait une asymptote horizontale d'équation y = b, il faut **qu'au moins une** de ces 2 conditions soient respectées :

$$\mathbf{1.}\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{ b ou } \mathbf{2.}\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{ b}$$

Exemple 9.2

Soit la fonction f(x) = 4 - $\frac{3}{x}$, déterminons la présence d'asymptote horizontale.

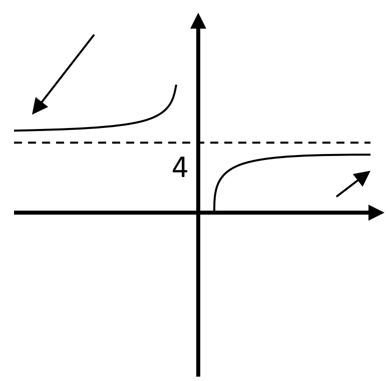
Analysons le comportement de f lorsque $x \to +\infty$ $\boldsymbol{et}$ $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} 4 - \frac{3}{x} = \lim_{x \to +\infty} 4 - \frac{3}{9999999\ldots} = 4 - 0 = 4$$

Donc, y = 4 est une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} 4 - \frac{3}{x} = \lim_{x \to -\infty} 4 - \frac{3}{-9999999\ldots} = 4 - 0 = 4$$

Donc, y = 4 est une asymptote horizontale lorsque $x \to -\infty$



Cependant, il suffisait de vérifier **qu'une** de ces deux limites égales 4 pour conclure la présence d'une asymptote horizontale.

Exemple 9.3

Soit la fonction *f(x)* = $\frac{x^5+7}{x^3+4x^2+5}$, déterminons si cette fonction possède des asymptotes horizontale.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+7}{x^3+4x^2+5} = \frac{+\infty}{+\infty}\ \textit{est une indétermination}$$

Pour lever cette indétermination, il y a un truc :

- **Mettre en évidence la plus grande puissance de x** figurant au numérateur et faire de même avec le dénominateur.

- Simplifier la fonction et évaluer ensuite la limite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1+\frac{7}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{7}{x^5}\right)}{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{(+\infty)^2\left(1+\frac{7}{(+\infty)^5}\right)}{\left(1+\frac{4}{+\infty}+\frac{5}{(+\infty)^3}\right)}$$

$$= \frac{(+\infty)^2(1+0)}{(1+0+0)} = +\infty$$

Comme la limite lorsque $x \to +\infty$ n'égale pas un nombre réel, dans ce cas-ci, égalant$+\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale. Par contre, si la limite avait donnée 3, il y aurait eu une asymptote en y = 3.

Remarque : Dans votre cours de Calcul 1, vous serez aussi en mesure d'identifier les asymptotes obliques de la courbe d'une fonction.

Exercice 9.3

Déterminer si la fonction suivante possède une asymptote horizontale.

f(x) = $\frac{10x^2-1}{5x^2+6x+1}$

Exercice 9.4

Évaluer la limite suivante afin de reconnaître l'existence ou non d'une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16}$$

Chapitre 10 : Chapitre qui tue : Dérivée d'équations implicites

Je me devais de vous montrer comment dériver des équations implicites. Cependant, je vous avertis, ce chapitre est complexe. C'est pour cette raison que cette notion est dans les derniers chapitres, car je ne voulais pas vous achever trop vite… Mais au moins, vous pourrez vous vanter d'avoir vu les dérivées des équations implicites avant votre cours de Calcul 1.

Remarque : Il y aura beaucoup de références au **chapitre 8**.

En général, vous avez toujours analysé des fonctions ou le *y* était isolé.

Ex. $y = 2x + 4$ ou $y = 2\sqrt{x-4} + 1$ ou $y = \frac{3x+1}{x^2-9}$

Par contre, il y a certaines fonctions où les variables x et y sont liées par une relation implicite, c'est-à-dire que le y ne s'isole pas.

Ex. $x^3y + xy^2 = 5$ ou $3x^4y^5 + 4y^2 = 7x^2y^3 - 9$

Ces équations sont appelées *équations implicites.*

Le but de ce chapitre est de trouver la dériv*ée* de certaines équations implicites, que nous notions dans les chapitres précédents ***f ´(x)***, pour faciliter le langage mathématique nous écrirons à la place ***y´***.

Avant de dériver des équations implicites, voici un préalable crucial, c'est-à-dire une 7ème proposition importante qui sera généralisée l'an prochain en calcul 1 par ce qu'on appellera la ***règle de dérivation en chaîne*** permettant de trouver la dérivée des fonctions dites **composées**.

> ***Proposition 7*** : Si *H*(x) = $[f(x)]^r$, alors *H'*(x) = r$[f(x)]^{r-1}f'(x)$ où r ∈ $\mathbb{R}$

Par exemple, calculons la dérivée de *H(x)* = $(8x^4 - 2x)^4$

Selon la proposition 7 : *H'(x)* = $4(8x^4 - 2x)^3(32x^3 - 2)$, ce qui est relativement facile à comprendre.

Voici un autre exemple : calculons la dérivée de *H(x)* = $(x^3 + x^2 - 6x)^5$

H'(x) = $5(x^3 + x^2 - 6x)^4(3x^2 + 2x - 6)$

Avant d'effectuer la dérivée d'équation implicite, il y a un autre préalable important **la notation de Leibniz**.

$\frac{dy}{dx}$ $signifie$ $dériver$ y $\left(la\ fonction\ f(x)\right)$ $par\ rapport$ à x.

$\frac{dy}{du}$ $signifie$ $dériver$ y $\left(la\ fonction\ f(x)\right)$ $par\ rapport$ à u.

$\frac{du}{dx}$ $signifie$ $dériver$ u $(la\ fonction\ ''u'')$ $par\ rapport$ à x.

Ces notations désignent la fonction à utiliser et la dériver par rapport à une variable en particulier.

Notation de Leibniz : *f ’(x) = y’ =* $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}}$

Reprenons l’exemple précédent et calculons la dérivée appelée f ’(x) ou y’ ou $\frac{dy}{dx}$

de *y* $= (8x^4 - 2x)^4$, grâce à la notation de Leibniz.

D’abord affirmons que y = u^4 et $u = 8x^4 - 2x$

Calculons : $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \ \frac{du}{dx}$

$= 4u^3\ (32x^3 - 2)$ car $\frac{dy}{du} = 4u^3 est\ la\ dérivée\ de\ y\ par\ rapport$ à $u\ et$

$\frac{du}{dx} = 32x^3 - 2\ est\ la\ dérivée\ de\ u\ par\ rapport$ à x

$= 4(8x^4 - 2x)^3(32x^3 - 2)$ car $u = 8x^4 - 2x$

Nous allons maintenant utiliser le principe de la notation de Leibniz afin de trouver **la dérivée d’équations implicites.**

Dans l’exemple suivant, nous allons calculer la dérivée notée *y’* c’est-à-dire $\frac{dy}{dx}$ (sans isoler *y*). Nous allons dériver chacun des deux membres de l’équation ce que nous appelons la dérivation implicite.

$$\boldsymbol{x^2 + y^3 - x^2y^5 = 8}$$

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^3 - x^2y^5) = \frac{d}{dx}(8)$ $\quad$ *en dérivant les 2 membres par rapport à x*

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x^2y^5) = \frac{d}{dx}(8)$ $\quad$ *proposition 4*

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) - \left[\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)(y^5) + (x^2)\left(\frac{d}{dx}(y^5)\right)\right] = \frac{d}{dx}(8)$ $\quad$ *proposition 5*

$2x + \frac{d}{dx}(y^3) - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\frac{d}{dx}(y^5)\right)\right] = 0$ $\quad$ *propositions 3 et 1*

Notez que les dérivées restantes ne s'exécutent pas **par rapport à x.** Nous devrons avoir recours pour ce faire à la notation de Leibniz.

$2x + \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx} - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\frac{dy^5}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$ $\quad$ *Notation de Leibniz*

$2x + \boldsymbol{3y^2}\frac{dy}{dx} - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\boldsymbol{5y^4}\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$ $\quad$ *dérivées y^3 et y^5 par rapport à y*

$2x + 3y^2\ y' - [(2x)(y^5) + (x^2)(5y^4\ y')] = 0$ $\quad$ *car* $\frac{dy}{dx} = y'$

$2x + 3y^2\ y' - (2x\,y^5 + x^2 5y^4 y') = 0$ $\quad$ *simplication des parenthèses*

Isolons maintenant y' qui est la dérivée recherchée.

$2x + 3y^2\ y' - 2x\,y^5 - 5x^2y^4y' = 0$

$3y^2\ y' - 5x^2y^4y' = -2x + 2x\,y^5$

$y'(3y^2 - 5x^2y^4) = -2x + 2x\,y^5$ $\quad$ *mise en évidence simple*

$y' = \frac{-2x+2x\,y^5}{3y^2-5x^2y^4}$ *voici, après une longue attente, la dérivée de* $x^2 + y^3 - x^2y^5 = 8$

Remarque : En général, dans les équations implicites où il s'agit d'évaluer y', nous avons à cause de la proposition 7 et la notation de Leibniz,

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(y^n) = \frac{d(y^n)}{dy}\ \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y'}$$

Dans les deux exemples suivants au lieu d'écrire $\frac{d}{dx}$ nous allons écrire l'équivalent *y'*.

<u>**Exemple 10.1**</u>

Calculons *y'* si $x^7y^3 = x^2$

$(x^7y^3)' = (x^2)'en\ dérivant\ les\ deux\ membres$

$(x^7)'\,y^3 + (x^7)(y^3)' = (x^2)'\ proposition\ 5$

$7x^6y^3 + x^7 3y^2y' = 2x\ proposition\ 3$

$x^7 3y^2y' = 2x - 7x^6y^3$

$$y' = \frac{2x - 7x^6y^3}{3x^7y^2}$$

<u>**Exemple 10.2**</u>

Calculons *y'* si $7x^5y^8 + 6y^3 - 5x^4 = 3x^2y^3 - 2x^8y^5$

$(7x^5y^8 + 6y^3 - 5x^4)' = (3x^2y^3 - 2x^8y^5)' \qquad en\ dérivant\ les\ deux\ membres.$

$(7x^5y^8)' + (6y^3)' - (5x^4)' = (3x^2y^3)' - (2x^8y^5)' \quad proposition\ 4$

$35x^4y^8 + 56x^5y^7y' + 18y^2y' - 20x^3 = 6xy^3 + 9x^2y^2y' - 16x^7y^5 - 10x^8y^4y'$

$propositions\ 3\ et\ 5$

Isolons maintenant le *y'*

$56x^5y^7y' + 18y^2y' - 9x^2y^2y' + 10x^8y^4y' = -35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5$

$y'(56x^5y^7 + 18y^2 - 9x^2y^2 + 10x^8y^4) = -35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5$

$$y' = \frac{-35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5}{56x^5y^7 + 18y^2 - 9x^2y^2 + 10x^8y^4}$$

Exercice 10.1

Calculer la dérivée *y’* de cette équation implicite.

$x^2 + y^2 = 16 \; soit \; l'\text{é}quation \; d'un \; cercle \; de \; rayon \; 4$

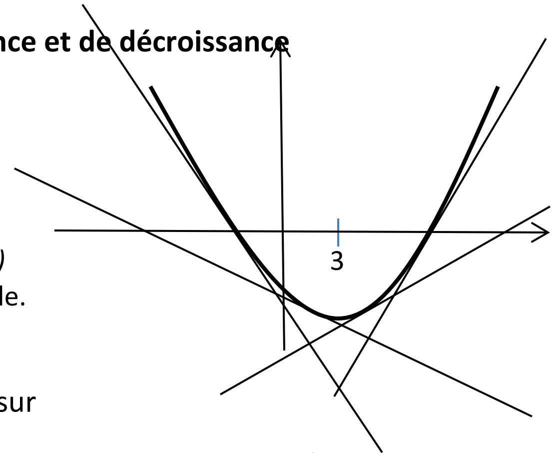
Exercice 10.2

Calculer la dérivée *y’* pour l’équation suivante :

$5x^3 + 2xy^4 = 3x^2y^3$

Chapitre 11 : Analyse de fonctions algébriques

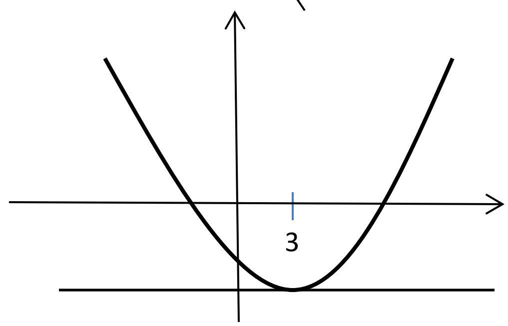
11.1 Intervalles de croissance et de décroissance



1) Nous constatons que *f* (la parabole) est décroissante sur -∞,3].

Remarquez que toutes les tangentes à la courbe de *f* sur -∞,3] ont une pente négative d'où les dérivées *f'(x)* seront négatives (***f'(x)*** $<$ **0**) pour tous x sur cet intervalle.

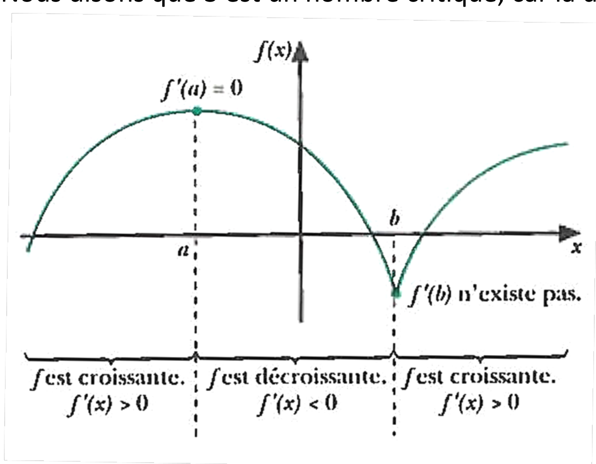
2) Également, nous constatons que *f* est croissante sur [3,+∞



Remarquez que toutes les tangentes à la courbe de *f* sur [3,+∞ ont une pente positive d'où les dérivées *f'(x)* seront positives (***f'(x)*** $>$ **0**) pour tous x sur cet intervalle.

3) Par contre, à x = 3 la tangente a une pente nulle donc, ***f'(x)* = 0.**

Nous disons que 3 est un nombre critique, car la dérivée est nulle à cette valeur de x.



Définition : Soit *c* ∈ dom f. Nous disons que «*c*» est un nombre critique de *f* (un *x* entre 2 variations) si :
1) *f'(c)* = 0.
ou
2) *f'(c)* n'existe pas.

Résumons :

Analyse de variation : croissante, décroissante et nulle

1) Si ***f'(x)*** $<$ **0** sur [a,b] alors *f* est décroissante sur [a,b].
2) Si ***f'(x)*** $>$ **0** sur [a,b] alors *f* est croissante sur [a,b].
3) Si ***f'(c)* = 0** alors *c* est un nombre critique.

Exemple 11.1

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

Déterminons les nombres critiques de *f*.

Remarquez que $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} = (x^2 - 2x - 3)^{\frac{1}{2}}$

Donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)^{\frac{-1}{2}}(x^2 - 2x - 3)'$ *par la proposition 7 chap. 10*

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)^{\frac{-1}{2}}(2x - 2) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$

Si nous factorisons alors $f'(x) = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}$

1) $f'(x) = 0$ *si* $x = 1$ d'où 1 est un nombre critique

2) $f'(x)$ n'existe pas si $x = -1$ ou $x = 3$ d'où -1 et 3 sont aussi des nombres critiques

Exemple 11.2

Maintenant nous analyserons, en 3 étapes, une fonction selon ses nombres critiques ainsi que ses variations (croissance, décroissance et constance).

Soit *f(x)* = $x^2 + 4x - 12$

1ère étape : Calculez $f'(x)$ et factoriser $f'(x)$ car factoriser nous aidera à déterminer les nombres critiques

$f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0$ *si* $x = -2$ d'où -2 est un nombre critique

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

Le tableau des variations permet de déterminer les valeurs de x qui rendent la dérivée positive ou négative.

x	$-\infty$	Placer ici le nombre critique déterminé à l'étape 2.	$+\infty$
$f'(x)$	Placer ici le signe ($+$ ou $-$) de $f'(x)$ sur l'intervalle ci-dessus.	Ici $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas.	Placer ici le signe ($+$ ou $-$) de $f'(x)$ sur l'intervalle ci-dessus.
	Sur cet intervalle, $f'(x)$ est toujours de même signe.		Sur cet intervalle, $f'(x)$ est toujours de même signe.

x	-∞	-2	+∞
f'(x)	−	0	+
f	f est décroissante (↘) sur -∞, -2]	*f*(-2) = -16	f est croissante (↗) sur [-2, +∞

Exemple 11.3

Soit $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$, construisons un tableau de variations

1ère étape :

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}\ (x^2-1)' \qquad proposition\ 7\ chap. 10$$

D'où; $f'(x) = \frac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = \frac{2x}{4\sqrt[4]{((x-1)(x+1))^3}}$ en factorisant

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0$ d'où 0 est un nombre critique

2) $f'(x)$ n'existe pas si $\mathrm{x} = -1$ ou $\mathrm{x} = 1$ d'où -1 et 1 sont des nombres critiques

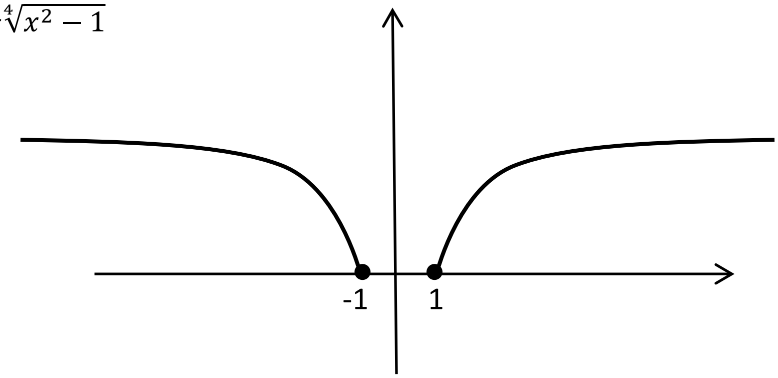
3ème étape : tableau de variation

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	−	∄	∄	0	∄	∄	+
f	↘	0	∄	∄	∄	0	↗

Note : $\nexists$ signifie que $f'(x)$ ou $f(x)$ n'existe pas, car la valeur de la racine carrée n'existe pas (nous ne pouvons pas faire la racine carrée d'un nombre négatif.)

Pour corroborer notre tableau voici à quoi ressemble le graphique de cette fonction

f(x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$



Exercice 11.1

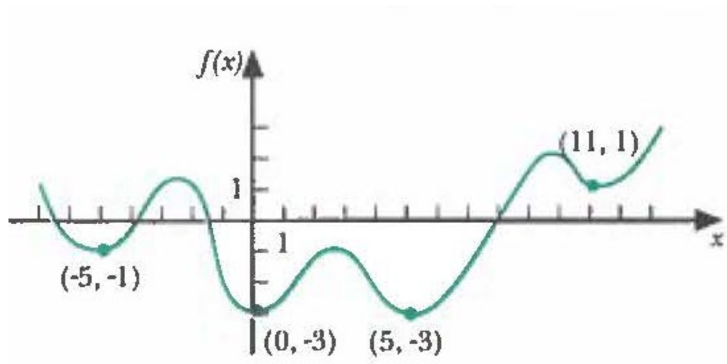
Construire le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2$

11.2 Maximum et minimum (Test de la dérivée première)

Grâce à ce graphique nous allons distinguer les maximums absolu et relatif ainsi que les minimums absolu et relatif.



Maximum absolu : y = 2

Maximum relatif y = 1,5 y = -1 et y = 2 (Tout maximum absolu est aussi un maximum relatif)

Minimum absolu y = -3

Minimum relatif y = -1 et y = -3 (Tout minimum absolu est aussi un minimum relatif)

Comme vous pouvez le constater :

Un **minimum** est toujours une décroissance **(↘)** suivie d'une croissance **(↗)**

Un **maximum** est toujours une croissance **(↗)** suivie d'une décroissance **(↘)**

Nous pouvons donc construire un **tableau de variation** (**test de la dérivée première**) afin de déterminer facilement les extrémums d'une fonction.

Exemple 11.4

Déterminons les maximums et minimums de la fonction suivante

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 12$

1ère étape : $f'(x) = 6x^2 - 18x - 108$

$f'(x) = 6(x^2 - 3x - 18) = 6(x+3)(x-6) \qquad en\ factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = -3\ ou\ x = 6$, d'où -3 et $x = 6$ sont des nombres critiques

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

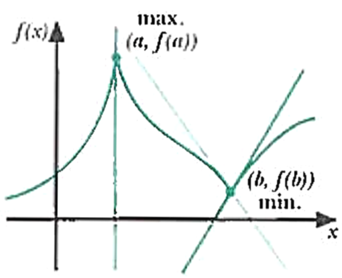
3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	-3		6	+∞
$f'(x)$	+	0	$-$	0	+
f	↗	201	↘	-528	↗
		Max		**Min**	

Donc, y = 201 est un maximum et y = -528 est un minimum

Remarque : Dans le cas particulier où $f'(x)$ n'existe pas et le point *(c, f(c))* est un minimum ou maximum, ce point peut également s'appeler point anguleux ou point de rebroussement. Votre professeur de calcul 1 vous donnera plus de détail sur ces types d'extrémums.

■ ***Exemple*** Soit la fonction f définie par le graphique suivant.



$(a, f(a))$ est un point de rebroussement.

$(b, f(b))$ est un point anguleux.

Exercice 11.2

Déterminons les maximums ou minimum des fonctions suivantes

a) $f(x) = -x^2 + 5x + 7$

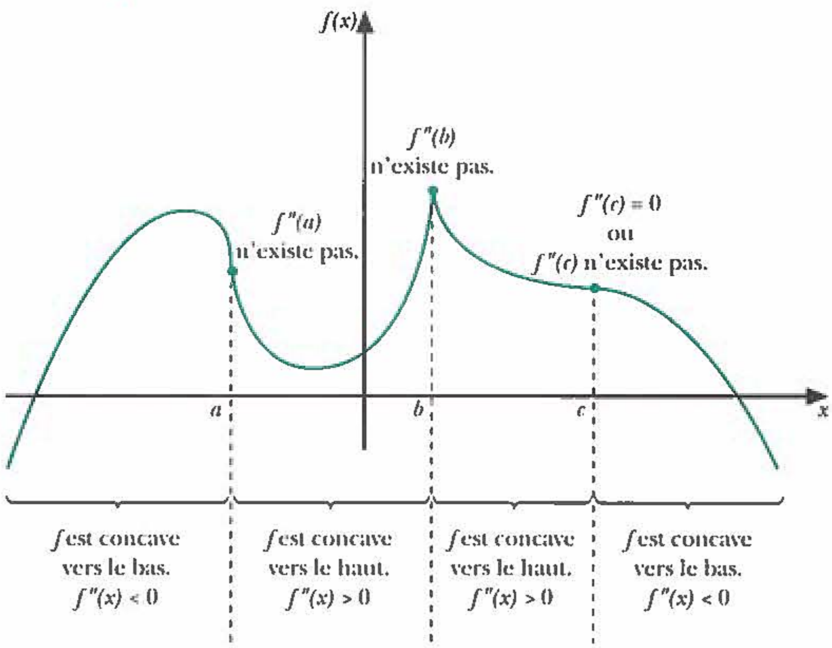
b) $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 9$

c) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

11.3 Intervalles de concavité vers le bas et concavité vers le haut

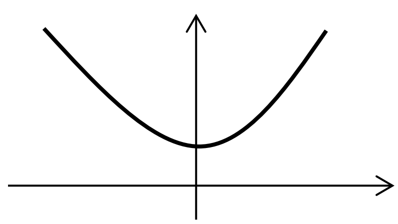
Note : Certains de vos profs pourraient employer le terme concave pour la concavité vers le bas et convexe pour la concavité vers le haut.

■ ***Exemple*** Soit la fonction f définie par le graphique ci-dessous.



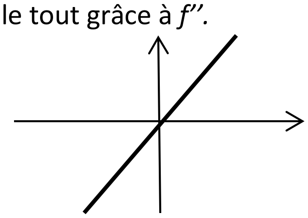
D'abord, nous allons relier la concavité d'une courbe au signe de la dérivée seconde *f''.*

Exemple 11.5



Soit $f(x) = x^2 + 1$

À l'aide du graphique ci-contre, nous constatons que la courbe de *f* est concave vers le haut sur $\mathbb{R}$. Nous prouverons le tout grâce à *f''.*



Nous savons que $f'(x) = 2x$.

Cette fonction est toujours croissante ce qui veut dire que la **dérivée** de $f'(x) = 2x$ donc $f''(x)$, sera toujours supérieur ou égale à 0.

En effet, $f''(x) = 2$ d'où $f''(x) \geq 0$ ∀ x ∈ $\mathbb{R}$.

Nous allons juger de la concavité d'une fonction grâce à deux propositions :

> **Proposition 1** : Soit une fonction *f* continue sur [a, b] telle que *f''* existe sur]a, b[.
> Si ***f''(x)* > 0** sur]a, b[, alors la courbe de f est **concave vers le haut** sur [a, b].

Par le même principe :

> **Proposition 2** : Soit une fonction *f* continue sur [a, b] telle que *f''* existe sur]a, b[.
> Si ***f''(x)* < 0** sur]a, b[, alors la courbe de f est **concave vers le bas** sur [a, b].

Voir graphique ci-haut pour bien assimiler ces deux propositions

Exemple 11.6

Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 2$

Déterminons, en 3 étapes, les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas grâce à la dérivée seconde.

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$

$f''(x) = 6x - 10$

$\quad = 2(3x - 5)$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = \frac{5}{3}$ d'où $\frac{5}{3}$ est un nombre critique

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
f''(x)	$-$	0	+
f	*f* est concave vers le bas sur $-\infty, \frac{5}{3}]$ **Notation : ∩**	$f(\frac{5}{3}) = -5{,}59$	*f* est concave vers le haut sur $[\frac{5}{3}, +\infty$ **Notation : ∪**

Exemple 11.7

Soit$f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$

Déterminons les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ pour aucun x.

2) $f''(x)$ n'existe pas si $x = 0$ d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	0	+∞
f''(x)	+	∄	−
f	∪	5	∩

f est donc concave vers le haut de -∞, 0] et

f est concave vers le bas de [0, +∞

Exercice 11.3

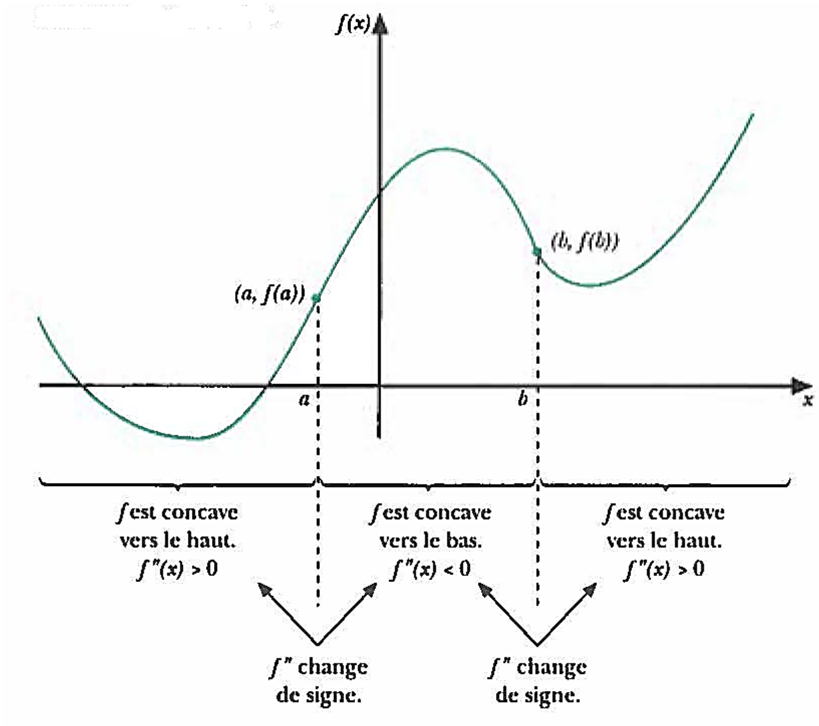
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les intervalles de concavité vers le haut et concavité vers le bas de *f.*

a) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 9$

b) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

11.4 Points d'inflexion, maximums et minimums

Un point d'inflexion est un point du graphique d'une fonction ou il y a **changement de concavité** (∪ suivi de ∩ ou ∩ suivi de ∪). On remarque dans le graphique ci-dessous que les points *(a, f(a))* et *(b, f(b))* sont deux points d'inflexion. La fonction tangente, vue cette année, possède un point d'inflexion à chaque cycle.



Exemple 11.8

Soit $f(x) = x^4 - 24x^2 - 34$

Déterminons les points d'inflexion de *f.*

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 4x^3 - 48x$

$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4) = 12(x - 2)(x + 2) \quad En\ factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = \ 2\ ou\ x = \ -2$ d'où -2 et 2 sont des nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

$3^{ème}$ étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	-2		2	$+\infty$
f''(x)	+	0	−	0	+
f	∪	-114	∩	-114	∪
		inflexion		inflexion	

Donc les points : (-2, -114) et (2, -114) sont tous deux, des points d'inflexion de *f*.

Exercice 11.4

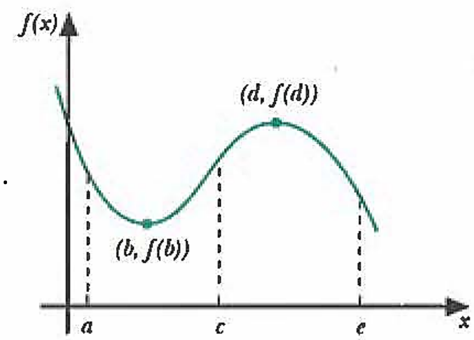
Trouver les points d'inflexion de cette fonction.

$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$

11.5 Test de la dérivée seconde

Je termine ce chapitre par une façon de faire plus rapide pour juger si un point est un maximum ou minimum sans toujours faire un tableau relatif à *f'*, cette façon de faire s'appelle le **test de la dérivée seconde**.

Pour comprendre ce test voici un exemple de compréhension :



Soit la fonction *f* définie par le graphique ci-contre.

Nous pouvons constater que :

i) le point *(b, f(b))* est un **minimum** de *f*,

ii) Donc, il est clair que *f'(b)* = 0 (tangente à ce point horizontale donc de pente nulle).

iii) Nous remarquons facilement que *f* est **concave vers le haut** autour du point *(b, f(b))* Ceci nous amène à dire que ***f''(b)* > 0**.

De la même façon :

i) le point *(d, f(d))* est un **maximum** de *f*,

ii) Donc, il est clair que *f'(d)* = 0 (tangente à ce point horizontale donc de pente nulle).

iii) Nous remarquons facilement que *f* est **concave vers le bas** autour du point *(d, f(d))* Ceci nous amène à dire que ***f''(d)* < 0**.

Voici donc en un résumé le **test de la dérivée** seconde :

Soit une fonction *f* et c un nombre critique de *f* tel que $f'(c) = 0$.

1) Si $f''(c) > 0$ alors le point $(c, f(c))$ est un minimum.

2) Si $f''(c) < 0$ alors le point $(c, f(c))$ est un maximum.
3) Si $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ n'existe pas, alors on ne peut rien conclure.

Exemple 11.9

Soit $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

Déterminons les maximums et minimums grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : calculer $f'(x)$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x-1)(x+1) \quad en\ factorisant$$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *f*.

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0, x = 1\ et\ x = -1, d'\text{où} -1, 0\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer $f''(x)$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$f''(-1) = -30\ donc\ f''(-1) < 0\ donc\ \big(-1, f(-1)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ f.$$

$$f''(1) = 30\ donc\ f''(1) > 0\ donc\ \big(1, f(1)\big)\ est\ un\ minimum\ de\ f.$$

$$f''(0) = 0\ \ donc\ on\ ne\ peut\ rien\ conclure\ pour\ l'instant\ \text{à}\ savoir$$

$$si\ nous\ sommes\ en\ \text{présence}\ d'un\ minimum\ ou\ maximum$$

Pour savoir si (0, f(0) est un max. ou min. nous devons obligatoirement bâtir un tableau de variation (test de la dérivée première voir section 11.2)

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	+	0	−	0	−	0	+
f	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		Max		**Rien conclure**		**Min**	

Nous constatons que (-1, 4) est un maximum et (1, 0) est un minimum comme le test de la dérivée seconde l'a démontré. Par contre, le point (0, 2) n'est ni un maximum ou minimum. On pourrait vérifier si (0, 2) est un point d'inflexion grâce au tableau de variation relatif à *f''*. (voir section 11.4)

Exemple 11.10

Soit $f(x) = 2x^3 - 6x + 3$

Déterminons les maximums et minimums de cette fonction suivante grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : calculer *f'(x)*

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x-1)(x+1) \qquad en\ factorisant$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *f*.

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 1\ et\ x = -1, d'où -1\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *f''(x)*

$f''(x) = 12x$

4ème étape : Test de la dérivée seconde :

$f''(-1) = -12\ donc\ f''(-1) < 0\ donc\ \big(-1, f(-1)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ f.$

$f''(1) = 12\ donc\ f''(1) > 0\ donc\ \big(1, f(1)\big)\ est\ un\ minimum\ de\ f.$

Donc,$\big(-1, f(-1)\big)\ ou\ (-1, 7)\ est\ un\ maximum\ et\ \big(1, f(1)\big)\ ou\ (1, -1) est\ un\ minimum.$

11.6 Analyse des fonctions algébriques à l'aide de la dérivée première et seconde

Ce chapitre vous parait peut-être lourd ou même pénible pour certains…, alors j'ai ajouté cette section qui résume l'ensemble du chapitre 11.

Exemple 11.11

Voici un dernier exemple qui englobe l'essentiel de ce chapitre. Le tout sera résumé à travers celui-ci.

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$, étudions cette fonction *f* grâce aux dérivées première et seconde.

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 3x(x-4) \qquad en\ factorisant$$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0\ et\ x = 4, d'$où $0\ et\ 4\ sont\ des\ nombres\ critiques$.

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$$f''(x) = 6x - 12$$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ si\ x = 2\ d'$où $2\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	0		2		4	+∞
f'(x)	+	0	–	–	–	0	+
f''(x)	–	–	–	0	+	+	+
f	↗ et ∩	7	↘ et ∩	-9	↘ et ∪	-25	↗ et ∪
Allure et points		(0, 7)		(2, -9)		(4, -25)	
		Max		**Inflexion**		**Min**	

Remarques :

Dans la ligne *f* : Vous devez que combiner croissante ↗ (*f'(x) : +*) ou décroissante ↘ (*f'(x)* : *−*) selon le signe de *f'* et la concavité vers le haut ∪ (*f''(x) : +)* ou la concavité vers le bas ∩ (*f''(x) : −)* avec le signe de *f''.*

De plus,

 signifie croissante ↗ et concave vers le bas ∩

 signifie croissante ↗ et concave vers le haut ∪

 signifie décroissante ↘ et concave vers le haut ∪

 signifie décroissante ↘ et concave vers le bas ∩

Dans votre cours de calcul 1, vous devrez esquisser le graphique de cette fonction. Avec la ligne : ***Allure et points***, il vous sera facile de la tracer à la main, ce qui est pour moi très difficile avec *Word*…

Exercice 11.5

Pour chacune des fonctions suivantes construire un tableau relatif à *f'* et *f''* afin de l'analyser en détail. (Trouver les maximums, minimums et points d'inflexion, concavité vers le haut et vers la bas.)

a) $f(x) = -x^5 + 7 + 5x$
b) $f(x) = \sqrt{x^3} - 3x + 1$
c) $f(x) = 5x - 4\sqrt[3]{x^2}$
d) $f(x) = \ x^5 + x^3 + 2x$

Chapitre 12 : Dérivées des équations exponentielles et logarithmiques

12.1 Dérivée des fonctions exponentielles

Proposition 1 : Si $H(x) = a^x, \text{où } a > 0 \text{ } et \text{ } a \neq 1, alors \text{ } H'(x) = a^x \ln a$

Je laisserai le soin à votre prof de Calcul 1 de prouver le pourquoi de cette proposition, il faut bien qu'il travaille un peu…

Exemple. 12.1

Calculons la dérivée des fonctions *f* suivantes.

a) Si $f(x) = 6^x \text{ } alors, f'(x) = 6^x \ln 6$

b) Si $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ } alors, f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

c) Si $f(x) = \frac{3^x}{x^3}$ alors,

$f'(x) = \frac{(3^x)'x^3 - 3^x(x^3)'}{(x^3)^2}$ *Proposition 6 chapitre 8*

$$= \frac{3^x \ln 3 x^3 - 3^x (3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(x\, 3^x \ln 3 - 3(3^x))}{x^6}$$ *en factorisant*

$$= \frac{x\, 3^x \ln 3 - 3(3^x)}{x^4}$$ *en simplifiant*

Proposition 2 : Si $H(x) = a^{f(x)}, \text{où } a > 0 \text{ } et \text{ } a \neq 1, alors \text{ } H'(x) = a^{f(x)} \ln a \, f'(x)$

La proposition 2 découle de la proposition 1 et également de la notation de Leibniz vue au chapitre 10.

Exemple 12.2

a) Si $f(x) = 2^{(x^4)}$, calculons la dérivée de *f*.

$f'(x) = 2^{(x^4)} \ln 2 \; 4x^3 = 4x^3 \; 2^{(x^4)} \ln 2$

Exercices 12.1

Calculer les dérivées de fonctions exponentielles suivantes :

a) $f(x) = 7^{x^3-2x}$

b) $f(x) = x^5 \; 8^x$

c) $f(x) = \frac{2x}{5^x + 11^x}$

Proposition 3 : Si $H(x) = e^x, alors \; H'(x) = e^x$

où *e* est la base naturelle e= 2,718281…

Oui oui, la dérivée de e^x reste inchangée … Votre prof le prouvera en calcul 1…

C'est pour cette fabuleuse raison qu'il a tellement de fonctions exponentielles en sciences (vous le verrez dans vos cours de physique au cégep) qui ont comme base, cette base «e»!

Exemple 12.3

Calculons la dérivée de :

$f(x) = e^{2x^3-5x}$

$f'(x) = e^{2x^3-5x} \ln e \; (6x^2 - 5) = (6x^2 - 5)e^{2x^3-5x} \ln e = (6x^2 - 5)e^{2x^3-5x}$

$\boldsymbol{car \ln e = 1}$ Comme vu dans votre mémorable cours avec moi…

Découle de cet exemple la prochaine proposition :

Proposition 4 : Si $H(x) = e^{f(x)}, alors\ H'(x) = e^{f(x)}$ *f'(x)*

Exercice 12.2

Calculer les dérivées de

a) $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$

b) $f(x) = 2^{3^x + e^x}$

12.2 Dérivée des fonctions logarithmiques

Note : je vous rappelle que, tel que vu dans mon cours que ln = $\log_e$.

Proposition 5 : Si $f(x) = \ln x\ , alors\ f'(x) = \frac{1}{x}$

C'est plus fort que moi, en voici la preuve :

Si $y = \ln x\ \ alors\ e^y = x$

$car\ y = \ln x, c'est\ comme\ dire\ y = \log_e x\ \ (un \log est\ un\ exposant!!!! \ldots)$

Je reviens à $e^y = x$

$e^{lnx} = x\ car\ y = \ln x$

$(e^{lnx})' = (x)'\ dérivées\ des\ 2\ membres$

$e^{lnx}(\ln x)' = 1$ *proposition 4*

$(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{lnx}}\quad isoler\ (\ln x)'$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ car $e^{lnx} = x\ car\ e^{lnx} = e^{\log_e x} = x\ loi\ fondamentale\ vu\ avec\ moi \ldots$

Exemple 12.4

Calculons la dérivée de :

a) $f(x) = x^3 \ln x$

$f'(x) = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)'$

$= 3x^2 \ln x + x^3 \dfrac{1}{x}$

$= 3x^2 \ln x + x^2$

b) $f(x) = ln^7\, x$

$f'(x) = 7ln^6 x\ (\ln x)' = 7ln^6 x\ \frac{1}{x} = \frac{7ln^6 x}{x}$ *(J'ai appliqué proposition 7 chap 10)*

Proposition 6 : Si $H(x) = \ln f(x)\,, alors\ H'(x) = [\frac{1}{f(x)}]f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Exemple 12.5

Calculons la dérivée de $f(x) = \ln(x^3 - 4x)$

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 4x)'}{(x^3 - 4x)} = \frac{3x^2 - 4}{(x^3 - 4x)}$$

Proposition 7 : Si $f(x) = \log_c x\,, alors\ f'(x) = \frac{1}{xlnc}$

Exemple 12.6

Calculons la dérivée de $f(x) = 2x \log_3 x$

$f'(x) = (2x)' \log_3 x + 2x(\log_3 x)'$

$= 2\log_3 x + 2x\ \frac{1}{xln\, 3} = 2\log_3 x + \frac{2x}{xln\, 3}$

Proposition 8 : Si $H(x) = \log_c f(x)\,, alors\ H'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)lnc}$

Exemple 12.7

Calculons la dérivée de $f(x) = \log_2(x^5 - 3x)$

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 3}{(x^5 - 3x)\ln\ 2}$$

Vous remarquerez qu'il est assez simple de dériver les fonctions logarithmiques en appliquant les propositions de 5 à 8. Votre difficulté sera de les apprendre par cœur…

Exercice 12.3

Calculer les dérivées de :

a) $f(x) = \ \log_6 x + \log_5 x$

b) $f(x) \ = \frac{\ln x^6}{x^6}$

c) $f(x) = \ x^2 \log_5 x$

d) $f(x) = \ \log_5(2x^5 + 3)$

e) $f(x) = \ x^7 ln^3 x$

Chapitre 13 : Optimisation

Comme vous l'avez vu lors de votre cours de 5ème secondaire nous pouvons trouver des maximums et des minimums liés à des problèmes écrits comme trouver le maximum de profits ou le minimum de dépenses d'une entreprise.

Dans ce chapitre, nous ferons la même chose, mais sans faire de polygones de contraintes pour trouver le sommet qui optimise la situation. Nous utiliserons maintenant le test de la dérivée première et le test de la dérivée seconde afin de trouver le maximum ou minimum d'un problème écrit.

Voici les 6 grandes étapes afin d'optimiser un problème écrit :

- 1) Définir les variables
- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)
- 3) Chercher les équations entre les variables
- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable
- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première **ou** test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Max ou Min)
- 6) Formuler la réponse

Voici un exemple concret qui témoigne bien de ces étapes à suivre.

<u>Exemple 13.1</u>

Chosebinne dispose de 120m de clôture pour délimiter un terrain rectangulaire. Quelle seront les dimensions du terrain pour que son aire soit maximale?

- 1) Définir les variables

x : largeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

$A(x, y) = xy$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre : $2x + 2y = 120$ d'où $y = \frac{120-2x}{2}$ et $x = \frac{120-2y}{2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

$$A(x, y) = x\left(\frac{120-2x}{2}\right)$$
$$= x\,(60 - x)$$

$$= 60x - x^2$$

$$D'où\ A(x, y) = 60x - x^2$$

Note : puisque x représente la longueur d'un côté et que le périmètre est de 120 il ne peut être plus grand que 60.
Donc, $0 \leq x \leq 60$ ou *dom* A = [0, 60]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée première

1ère étape : $A'(x) = 60 - 2x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = 30$, d'où 30 est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	0		30		60
A'(x)	∄ (car pas de base…)	+	0	−	∄ (car pas de hauteur)
A		↗	900	↘	8
			Max		

- 6) Formuler la réponse

Si x = 30 alors y = ?

Comme $y = \frac{120-2x}{2}$, alors $y = \frac{120-2(30)}{2}$, alors y = 30

Les dimensions recherchées sont donc de 30m par 30m.

Note : Nous aurions pu faire aussi le test de la dérivée seconde pour obtenir la même conclusion. En voici la preuve :

1ère étape : calculer *A'(x)*

$$A'(x) = 60 - 2x$$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *A*.

1) $A'(x) = 0\ si\ x = 30$, d'où 30 est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *A''(x)*

$A''(x) = -2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$A''(30) = -2\ donc\ \boldsymbol{A''(30) < 0}\ donc\ \left(30, A(30)\right)\ est\ un\ maximum\ de\ A$**.**

Je vous rappelle que si le test de la dérivée première fonctionne, il n'est pas nécessaire de faire le test de la dérivée seconde. Vous pouvez tout de même faire le test de la dérivée seconde en premier pour trouver le min ou le max, car c'est un plus rapide lorsqu'il fonctionne.

<u>Exemple 13.2</u>

Trouver deux nombres dont la somme est 12 et le produit est maximal. C'est le genre de problème qui pourrait être une belle énigme de la semaine (Nostalgie…)

- 1) Définir les variables

x : 1er nombre

y : 2ème nombre

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

P(x, y) = xy

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Puisque, *x + y = 12* alors, *y* $= 12 - x$ et $x = 12 - y$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

A(x, y) = $x(12 - x)$

D'où $A(x, y) = 12x - x^2$

Note: Puisque x représente la valeur du 1er nombre, il peut prendre n'importe quelle valeur d'où*do m P =* $\mathbb{R}$

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde (car plus rapide que le test de la dérivée première…)

$\mathbf{1}$è$\mathbf{re}$ é$\mathbf{tape}$: $P'(x) = 12 - 2x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *P.*

$1)\ P'(x) = 0\ si\ x = 6, \text{d'où 6 est un nombre critique}$

$2)\ P'(x)\ \text{est définie pour tous}\ x, \text{d'où aucun autre nombre critique}$

3ème étape : calculer *P''(x)*

$P''(x) = -2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$P''(6) = -2\ donc\ \boldsymbol{P''(6) < 0}\ donc\ \big(6, P(6)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ P.$

- 6) Formuler la réponse

Si x = 6 alors y = ?

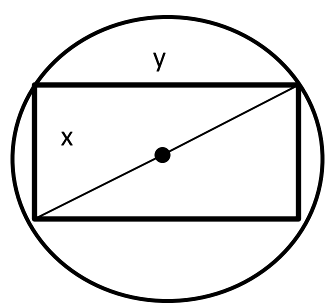
Comme $y = 12 - x$, alors $y = 12 - 6$ alors y = 6

Les deux nombres recherchés sont donc de 6 et 6!!!

Exercice 13.1

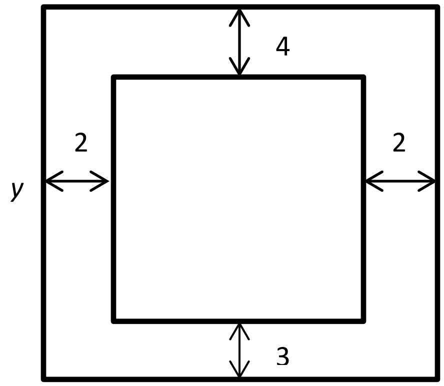
Résoudre les problèmes d'optimisation suivant :

a) Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire sera maximale à inscrire dans un cercle de rayon de 5 cm.

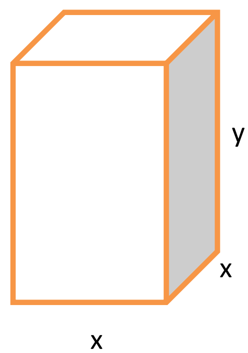


b) La somme de deux nombres positifs est 140. Quels sont ces deux nombres si le carré du premier ajouté au deuxième donne une somme minimale.

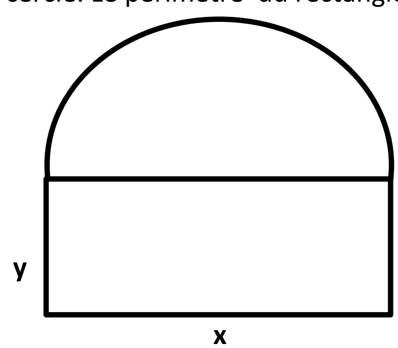
c) Une feuille a un périmètre de 110 cm. Si cette page comprend des marges de 4 cm en haut, de 3cm en bas et de 2 cm sur les deux côtés, quelles dimensions la page doit-elle avoir pour que sa surface soit maximale.



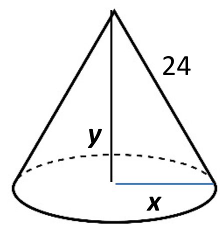
d) Une boîte en or à base carrée et ouverte sur le dessus a un volume de 36 cm^3. Déterminer les dimensions que doit avoir cette boîte pour que la quantité d'or nécessaire à sa fabrication soit minimale et évaluer cette quantité minimale d'or nécessaire.



e) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle est de 8m, déterminer les dimensions de la fenêtre d'aire maximale.



f) On forme un cône dont l'apothème est de 24 cm. Déterminer la hauteur du cône si son volume doit être maximal.



Chapitre 14 : Dérivée des fonctions trigonométriques

Durant notre cours de mathématiques de 5ème secondaire, nous avons étudié de long et en large les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Nous aborderons dans ce présent chapitre l'étude des dérivées de ces trois fonctions.

14.1 Dérivée de fonctions sinus

> ***Proposition 1*** : Si $H(x) = \ sin\ x,\ alors\ H'(x)\ =\ cos\ x$

Exemple 14.1

Calculons la dérivée de $f(x) = 2xsinx$

$f'(x) = (2x)'sinx + 2x(sinx)'$ Proposition 5 (du chap. 8)

$f'(x) = 2sinx + 2xcosx$ Proposition 1

Exemple 14.2

Calculons la dérivée de $f(x) = sin^4x$

$f'(x) = 4sin^3x(sinx)'$ Dérivation en chaîne (proposition 8) chapitre 10

$= 4sin^3xcosx$

Voici un bref rappel de ce qu'est la dérivation en chaîne. Cette méthode pour trouver la dérivée d'une fonction composée est très similaire à la proposition 7 vue au chapitre 10. La règle de la dérivation en chaîne est en quelque sorte sa généralisation.

Règle de dérivation en chaîne :

> ***Proposition 8 du chapitre 8:***
>
> Si $H(x) = \ f[g(x)],\ alors\ H'(x) = f'([g(x)]g'(x)$

Voici un exemple simple pour vous permettre de constater que cette proposition est facile à appliquer.

Calculons la dérivée de $H(x) = (x^3 + 5x)^7$

Si $H'(x) = r[f(x)]^{r-1}f'(x)$, $proposition\ 7\ alors$

$H'(x) = 7(x^3 + 5x)^6(x^3 + 5x)'$

$H'(x) = 7(x^3 + 5x)^6\,(3x^2 + 5)$

Nous pouvons prendre le traitement de deux fonctions de manière distincte,

soit $f(x) = x^7 et\ g(x) = x^3 + 5x$, voici donc une <u>autre façon de trouver cette même dérivée soit avec la règle de la dérivée en chaîne</u>:

$Si\ f(x) = x^7, alors\ f'(x) = 7x^6 et\ si\ g(x) = x^3 + 5x, alors\ g'(x) = 3x^2 + 5$

Par la proposition 8 :

$H'(x) = f'([g(x)]g'(x)$

$\quad = 7[g(x)]^6(3x^2 + 5)$

Comme vu dans notre cours (**Compositions de fonctions** : On met $g(x) : (x^3 + 5x)$ dans la fonction $f'(x) = 7x^6$ à la place du x.

$\quad = 7(x^3 + 5x)^6(3x^2 + 5)$

Revenons au but de ce chapitre, soit les dérivées des fonctions trigonométriques.

Proposition 1' : Si $H(x) = sin\ f(x),\ alors\ H'(x) = [cos\ f(x)]f'(x)$

<u>Exemple 14.3</u>

Calculons la dérivée de : $H(x) = \sin\,(3x^4 - 2x^3)$ alors,

$H'(x) = \cos(3x^4 - 2x^3)(3x^4 - 2x^3)'$ $\ Proposition\ 1'$ et dérivation en chaîne

$H'(x) = \cos(3x^4 - 2x^3)\,(12x^3 - 6x^2)$

<u>Exemple 14.4</u>

Si $f(x) = sin^3(x^2 - sinx)$, alors

$f'(x) = [sin^3(x^2 - sinx)]'$

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)[sin(x^2 - sinx)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)\, cos(x^2 - sinx)(x^2 - sinx)'$ *Proposition 1'*

$f'(x) = 3sin^2(x^2 - sinx)\, cos(x^2 - sinx)(2x - cosx)$

Exercice 14.1

Calculer les dérivées des fonctions sinus suivantes :

a) $f(x) = x^4 sinx$

b) $f(x) = sin\frac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = xsin^5(x^2 - 6)$

d) $f(x) = \frac{1}{sinx}$

14.2 Dérivée de fonctions cosinus

Proposition 2 : Si $H(x) = cos\ x,\ alors\ H'(x) = -sin\ x$

Exemple 14.5

$f(x) = \sqrt{\cos x}$

$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$ alors,

$f'(x) = \frac{1}{2}(cos)^{\frac{-1}{2}}(cosx)'$ *dérivation en chaîne*

$f'(x) = \frac{1}{2}(cos)^{\frac{-1}{2}}(-sinx)$ *Proposition 2*

$$f'(x) = \frac{-sinx}{2(cos\ x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-sinx}{2\sqrt{cosx}}$$

Proposition 2' : Si $H(x) = cos\ f(x),\ alors\ H'(x) = [-sinf(x)]f'(x)$

Exemple 14.6

Calculons la dérivée

$f(x) = \cos(3x^2)$, alors

$f'(x) = -\sin(3x^2)[3x^2]'$ *Proposition 2'*

$f'(x) = -\sin(3x^2)\ [6x]$

$f'^{(x)} = -6x \sin 3x^2$

Exercice 14.2

Calculer les dérivées des fonctions cosinus suivantes :

a) $f(x) = cos2x - cos^3x$

b) $f(x) = \frac{3x}{cosx}$

c) $f(x) = \ cos^4(2x^5 - 3)$

Poursuivons afin de trouver les dérivées de fonctions trigonométriques plus complexes. Vous verrez, ayant compris les dérivées des fonctions sinus et cosinus, il suffira de traiter le calcul de ces dérivées dans le même esprit.

Exemple 14.7

Calculons la dérivée de :

$f(x) = cosx^2 - 5\sin\,(3x - x^2)$

Donc, $f'(x) = [cosx^2]' - [5\sin(3x - x^2)]'$

$f'(x) = \ -sinx^2(x^2)' - 5cos(3x - x^2)(3x - x^2)'$ *Propositions 1' et 2'*

$f'(x) = \ -sinx^2(2x) - 5cos(3x - x^2)(3 - 2x)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - 5(3 - 2x)cos(3x - x^2)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - (15 + 10x)cos(3x - x^2)$

$f'(x) = \ -2xsinx^2 - 15cos(3x - x^2) + 10xcos(3x - x^2)$

En voici un à la hauteur de votre intelligence… En y allant étape par étape, proposition par proposition, nous y arriverons peu importe sa complexité!

<u>Exemple 14.8</u>

Calculons la dérivée de :

$f(x) = sin^3(x^2+5) + \ cos^2(2x^4+1)$

Donc, $f'(x) = [sin^3(x^2+5)]' + [cos^2(2x^4+1)]'$

$f'(x) = 3sin^2(x^2+5)[sin(x^2+5)]' + 2\cos(2x^4+1)[\cos(2x^4+1)]'$ *Dérivation en chaîne à deux reprises*

$f'(x) = 3sin^2(x^2+5)cos(x^2+5)(x^2+5)' + 2\cos(2x^4+1)(-sin(2x^4+1)(2x^4+1)'$

Propositions 1' et 2'

$f'(x) = 3sin^2(x^2+5)cos(x^2+5)(2x) + 2\cos(2x^4+1)(-sin(2x^4+1)(8x^3)$

$f'(x) = 6xsin^2(x^2+5)cos(x^2+5) - 16x^3\cos(2x^4+1)(sin(2x^4+1)$

Voilà!

Exercice 14.3

Calculer les dérivées de fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos(x^4 + sinx)$

b) $f(x) = \cos(sinx) - sin(cosx)$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(-x^3\right)$

14.3 Dérivée des fonction tangente, cotangente, sécante et cosécante

Proposition 3 : Si $H(x) = \ tan\ x, \ alors\ H'(x) = \ sec^2x$

À défaut de n'avoir pas fait la preuve des propositions précédentes, je me dois d'au moins prouver cette proposition 3.

Si $H'(x) = (tan\ x)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)'$ $Identité\ bien\ connu\ de\ mon\ cours\ ...$

$$f'(x) = \frac{(sinx)'cosx - sinx\ (cosx)'}{cos^2x}\ dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{cosx\ cosx - sinx\ (-sinx)}{cos^2x} \quad propositions\ 1\ et\ 2$$

$$f'(x) = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x} \qquad car\ sin^2x + cos^2x = 1$$

$$f'(x) = sec^2x \qquad car\ \frac{1}{cosx} = sec\ x$$

Avouez que c'est une belle preuve!

<u>Exemple 14. 9</u>

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x^5tanx\ \ alors,$

$f'(x) = (x^5)'tanx + x^5(tanx)'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = 5x^4tanx + x^5sec^2x\ \ Proposition\ 3$

Proposition 3' : Si $H(x) = tan\ f(x),\ alors\ H'(x) = [sec^2f(x)]f'(x)$

<u>Exemple 14.10</u>

Calculons la dérivée de :

$f(x) = tan(x^2 - 3x)$ alors,

$f'(x) = sec^2(x^2 - 3x)[(x^2 - 3x]' \qquad proposition\ 3'$

$f'(x) = sec^2(x^2 - 3x)(2x - 3)$

$f'(x) = (2x - 3)sec^2(x^2 - 3x)$

Proposition 4 : Si $H(x) = \cot x$, $alors\ H'(x) = -csc^2 x$

Exemple 14.11

Calculons la dérivée de :

$$f(x) = \frac{2x + x^3}{\cot x} \quad alors,$$

$$f'(x) = \frac{(2x + x^3)' \cot x - (2x + x^3)(\cot x)'}{cot^2 x} \qquad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{(2 + 3x^2) \cot x - (2x + x^3)(-csc^2 x)}{cot^2 x} \qquad Proposition\ 4$$

$$f'(x) = \frac{(2 + 3x^2) \cot x + (2x + x^3)(csc^2 x)}{cot^2 x}$$

Proposition 4' : Si $H(x) = \cot f(x)$, $alors\ H'(x) = [-csc^2 f(x)]\, f'(x)$

Exemple 14.12

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x + cot(sinx)$ alors,

$f'(x) = (x)' + [\cot(sinx)]'$

$f'(x) = 1 + [-csc^2(sinx)]\,(sinx)' \qquad Proposition\ 4'$

$f'(x) = 1 + [-csc^2(sinx)] \cos x \qquad Proposition\ 1$

$f'(x) = 1 - \cos x\, csc^2(sinx)$

Proposition 5 : Si $H(x) = \sec x$, $alors\ H'(x) = \sec x\ tanx$

À défaut de vous offrir un exemple, je trouvais plus pertinent de présenter la preuve de cette proposition.

$$H'(x) = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cos x - 1\,(cosx)'}{cos^2 x}$$

$$= \frac{0 - 1(-sinx)}{cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \sec x \tan x \qquad Voil\text{à}$$

Proposition 5' : Si $H(x) = \sec f(x)$, $alors\ H'(x) = [\sec f(x) tanf(x)\ ]\ f'(x)$

Exemple 14.13

Calculons la dérivée de :

$f(x) = \sec(4x^2 - 5x + 2)$, $\quad alors$

$f'(x) = \ \sec(4x^2 - 5x + 2)\tan(4x^2 - 5x + 2)\ (\ 4x^2 - 5x + 2)' \quad proposition\ 5'$

$f'(x) = \ \sec(4x^2 - 5x + 2)\tan(4x^2 - 5x + 2)\ (\ 8x - 5)$

$f'(x) = \ (8x - 5)\sec(4x^2 - 5x + 2)\tan\ (4x^2 - 5x + 2)$

Proposition 6 : Si $H(x) = \csc x$, $alors\ H'(x) = -\csc x \cot x$

Exemple 14.14

Calculons la dérivée de :

$f(x) = 6x^2 \csc x \quad alors,$

$f'(x) = (6x^2)' \csc x + 6x^2 (\csc x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$

$f'(x) = 12x \csc x + 6x^2(-\csc x)\cot x \quad Proposition\ 6$

$f'(x) = 12x \csc x - 6x^2 \csc x \cot x$

Proposition 6' : Si $H(x) = \csc f(x)$, $alors\ H'(x) = [-\csc f(x) \cot f(x)]\ f'(x)$

Exemple 14.15

Calculons la dérivée de :

$f(x) = csc^4(6 + x^5) \quad alors,$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[\csc(6 + x^5)]' \quad Dérivation\ en\ chaîne$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[-\csc(6 + x^5)\cot(6 + x^5)]\,(6 + x^5)' \qquad Proposition\ 6'$

$f'(x) = 4csc^3(6 + x^5)[-\csc(6 + x^5)\cot(6 + x^5)]\,(5x^4)$

$f'(x) = -20x^4csc^4(6 + x^5)\ \cot(6 + x^5)$

Exercice 14.4

Calculer les dérivées des fonctions trigonométriques suivantes :

a) $f(x) = \sec(3x) + \tan(2x^3 - 5x)$

b) $f(x) = \sin[\cos(2x)]$

c) $f(x) = \sqrt{\cot x} + \sec x$

d) $f(x) = tan^2 3x + sec^4(5x)$

e) $f(x) = 7x^3 - 4\sin(3x) + \csc(2 - x^3)$

f) $f(x) = \cot\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$

g) $f(x) = \frac{\tan 5x}{3 - \cot 3x}$

Chapitre 15 : Dérivée des réciproques des fonctions trigonométriques

15.1 Dérivée des fonctions réciproques de sinus, cosinus, tangente et cotangente

Dans ce dernier chapitre, nous étudierons les dérivées des fonctions réciproques ou inverses de sinus, cosinus, tangente et cotangente (arc sin, arc cos, arc tan et arc cot)

Dérivée d'arc sin x :

Proposition 1 : Si $f(x) = \; arc\ sin\ x,\;\; alors\ f'(x) = \; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Prouvons ensemble cette proposition.

$\sin(arc \sin x) = x, car \sin(sin^{-1}x) = x\ tel\ que\ vu\ dans\ mon\ cours!$

$[\sin\,(arc\ sinx)]' = x'\;\; en\ dérivant\ le\ deux\ membres\ de\ l'équation$

$\cos\,(\arcsin x)(arcsinx)' = 1\;\; Proposition\ 1'du\ chapitre\ 14$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\cos\,(\arcsin x)}\ puisque\ nous\ recherchons\ la\ dérivée\ de\ arcsin\, x, donc\ on\ l'isole$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\cos\big(f(x)\big)}\;\; car\ comme\ la\ proposition\ 1\ le\ dit\;\; f(x) = \; arc\ sin\ x$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\cos y}\;\;\; car\ y = f(x)\ par\ définition$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}}$

Car comme : $sin^2 y + cos^2 y = 1, donc\ cos^2 y = 1 - sin^2 y, donc \cos y = \sqrt{1 - sin^2 y}$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;\; \textit{Fin de la preuve!}$$

Car $x^2 = sin^2 y\ et\ en\ voici\ le\ pourquoi$:

si $y = arc \sin x,\;\; alors$

$\sin y = \sin arc \sin x, appliqué\ le\ sinus\ aux\ deux\ membres$

Donc, $sin\, y = \sin sin^{-1} x$

$\sin y = x$

Oui, elle est assez complexe, mais des preuves de ce genre, vous en aurez à la tonne dans votre cours de calcul 1…

Exemple 15.1

Calculons la dérivée de :

$f(x) = \; x^2 arc \sin x$

$f'(x) = (x^2)' \arcsin x + x^2 (arc \sin x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$

$$f'(x) = 2x \arcsin x + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad Proposition\ 1$$

$$f'(x) = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 1' : Si $H(x) = \; arc\ sin\ f(x), \; alors\ H'(x) = \; \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}} f'(x) = \; \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

Exemple 15.2

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arcsin(2x^5 - 8x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}} (2x^5 - 8x)' \quad Proposition\ 1'$$

$$f'(x) = \frac{10x^4 - 8}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}} \qquad ce\ qui\ est\ très\ simple\ comme\ vous\ le\ voyez\ \ldots$$

Dérivée d'arc cos x :

Proposition 2 : Si $f(x) = \; arc\ cos\ x, \; alors\ f'(x) = \; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Comme la preuve de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 1, je passe immédiatement à un exemple.

<u>Exemple 15.3</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = (\arccos\ x)^3$

$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2(\arccos\ x)'$ $\quad$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ $\quad$ *Proposition* 2

$$f'(x) = \frac{-3(\arccos\ x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 2' : Si $H(x) = \ arc\ cos\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}f'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

<u>Exemple 15.4</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arccos(-x^3 + 7x^2 - 4)$

$$f'(x) = \frac{-(-3x^2 + 14x)}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 14x}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

Dérivée d'arc tan x :

Proposition 3 : Si $f(x) = \ arc\ tan\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Exemple 15.5</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = (lnx)(\arctan x)$

$f'(x) = (lnx)' \arctan x + lnx(\arctan x)'$

$f'(x) = \frac{1}{x}\arctan x + lnx\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ $\quad$ *Dérivée de lnx et proposition* 3

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{x} + \frac{lnx}{1+x^2}$$

Proposition 3’ : Si $H(x) = \ arc\ tan\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Exemple 15.6

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arctan(x^2 - 7)^3$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6} [(x^2 - 7)^3]' \qquad Proposition\ 3'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6}\ 3(x^2 - 7)^2\ \ (x^2 - 7)' \quad Dérivation\ en\ chaîne$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6}\ 3(x^2 - 7)^2\ (2x)$$

$$f'(x) = \frac{6x(x^2 - 7)^2}{1 + (x^2 - 7)^6}$$

Dérivée d’arc cot x :

Proposition 4 : Si $f(x) = \ arc\ cot\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Comme cette proposition est très similaire à la proposition 3, passons immédiatement à la suivante.

Proposition 4’ : Si $H(x) = \ arc\ cot\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Exemple 15.7

Calculons la dérivée de : $f(x) = \operatorname{arccot}(x^3 + \tan x)$

$$f'(x) = \frac{-(x^3 + \tan x)'}{1 + (x^3 + \tan x)^2} \qquad Proposition\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{-\left(3x^2 + sec^2 x\right)}{1 + (x^3 + \tan x)^2} \qquad Proposition\ 3\ du\ chap.14$$

Exercice 15.1

Calculons la dérivée de :

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc \tan x)$

c) $f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{arc \cot 2x}$

d) $f(x) = arc \sin(\tan x) - \arccos(cscx)$

e) $f(x) = \frac{arc \cos x^3}{arc \sin x^2}$

f) $f(x) = \ln\,(arc \tan e^x)$

g) $f(x) = 2x^3 - \sin x\, \text{arccot}\, 5x$

15.2 Dérivée des fonctions réciproques de sécante et cosécante

En conclusion de ce chapitre, voici les propositions concernant les dérivées des fonctions arc sécante et arc cosécante. Cependant, je vous fournirai seulement que les propositions, car la manière de trouver les dérivées de ces fonctions est, à mon avis, trop redondante pour les analyser plus en détails par des exemples ou des exercices. Pour tout vous dire, certains professeurs de cégep ne les étudient même pas…

Dérivée d'arc sec x :

Proposition 5 : Si $f(x) = arc\ sec\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 5' : Si $H(x) = arc\ sec\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Dérivée d'arc csc x :

Proposition 6 : Si $f(x) = arc\ csc\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 6' : Si $H(x) = arc\ csc\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Ces dérivées devraient être la fin, oui oui la **FIN** de votre cours de Calcul 1. J'espère que ce document aura su vous aider à mieux comprendre votre premier cours de calcul différentiel du cégep. Il ne vous restera plus qu'à attaquer le cours de Calcul 2; LES INTÉGRALES!!!!

Réponses

Exercices 1.1

a) $\mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$
b) $\mathbb{R}$ car x peut prendre n'importe quelles valeurs
c) [3,+∞
d) $\sqrt{2x-10}$ est définie si 2x-10 ≥ 0, d'où x ≥ 5
$\sqrt{12-3x}$ est définie si 12-3x ≥ 0, d'où x≤ 4
Alors dom f = ∅

Exercices 2.1

a) -2 **b)** 7 car -2(-3)+1 = 7 **c)** ∅ car aucune restriction inclut x=2 **d)** 0 car $3^2 - 9 = 0$

Exercices 2.2

a)]-4,5]∪ $[6,+\infty$

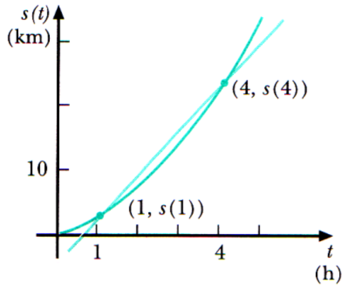
b) Si $x \leq 0$ alors f(x) = $\frac{-3}{x(x^2-1)} = \frac{-3}{x(x+1)(x-1)}$ donc x ≠ 0, x ≠ -1 et x ≠ 1 ce dernier ne respectant pas la restriction $x \leq 0$ doit être exclu du domaine.
dom f = -$\infty, \mathbf{-1}[\cup] - \mathbf{1}, \mathbf{0}[$ **si** $\mathbf{x \leq 0}$

Si x > 0 alors f(x) = $\sqrt{x-1}$ donc x – 1 $\geq$ 0 => x $\geq$ 1
dom *f* = [1,+∞ si x > 0
La réponse finale est toujours la réunion des 2 domaines : **-**$\infty, \mathbf{-1}[\cup] - \mathbf{1}, \mathbf{0}[\cup [\mathbf{1}, +\infty$

c)
Si x < 0 alors f(x) = 4x => dom f = -∞, 0[
Si x $\geq$ 0 alors f(x) = $\frac{2}{x-3}$ => dom f $[0,3[\cup]3,+\infty$
La réponse finale est toujours la réunion des 2 domaines **:** **-**∞, **3**[∪**]3,+**∞ **ou** $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{3}\}$

Exercice 3.1

a) $V_{[1,4]} = \frac{s(4) - s(1)}{4-1} = \frac{24\ m - 3\ m}{3\ s} = \frac{21}{3}$ = 7 m/s (Cette vitesse moyenne est correspond à la pente de la sécante passant par les point (1,s(1)) et (4,s(4)) de la fonction s(t).)



b) Pour calculer la vitesse instantanée, je vais calculer les vitesses moyennes $v_{[5,\ 6]}$, $v_{[5,\ 5{,}5]}$, $v_{[5,\ 5{,}1]}$ et $v_{[5,\ 5{,}001]}$ afin de voir *qu'à la limite* les vitesses moyennes tendent à s'approcher de la vitesse instantanée de 12 m/s

$v_{[5,\ 6]} = \frac{s(6) - s(5)}{6-5} = \frac{48\ m - 35\ m}{1\ s}$ = 13 m/s

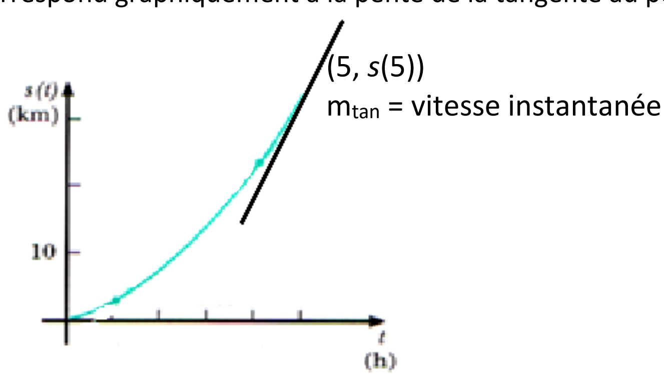
$v_{[5,\ 5{,}5]} = \frac{s(5{,}5) - s(5)}{5{,}5-5} = \frac{41{,}25\ m - 35\ m}{0{,}5\ s}$ = 12,5 m/s

$v_{[5,\ 5{,}1]} = \frac{s(5{,}1) - s(5)}{5{,}1-5} = \frac{36{,}21\ m - 35\ m}{0{,}1\ s}$ = 12,1 m/s

$v_{[5,\ 5{,}001]} = \frac{s(5{,}001) - s(5)}{5{,}001-5} = \frac{35{,}012001\ m - 35\ m}{0{,}001\ s}$ = 12,001 m/s

On peut donc voir qu'à la limite, les vitesses moyennes tendent vers 12 m/s. Cette dernière correspond à la vitesse instantanée.

c) Cette vitesse instantanée correspond graphiquement à la pente de la tangente au point (5, *s*(5)) ou (5, 35).



Exercice 3.2

a) Pour trouver la vitesse instantanée, je vais trouver les vitesses moyennes $v_{[2,\ 2{,}1]}$, $v_{[2,\ 2{,}01]}$, $v_{[2,\ 2{,}001]}$ et $v_{[2,\ 2{,}0001]}$

$v_{[2,\ 2{,}1]} = \frac{s(2{,}1) - s(2)}{2{,}1-2} = \frac{6{,}82\ m - 6\ m}{0{,}1\ s}$ = 8,2 m/s

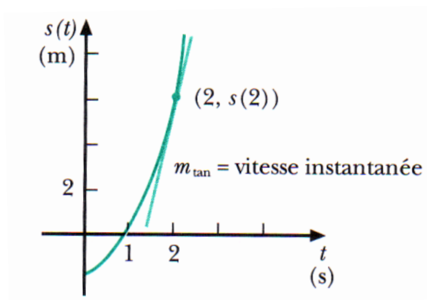
$v_{[2,\ 2,01]} = \frac{s(2{,}01) - s(2)}{2{,}01-2} = \frac{6{,}0802\ m - 6\ m}{0{,}01\ s}$ = 8,02 m/s

$v_{[2,\ 2,001]} = \frac{s(2{,}001) - s(2)}{2{,}001-2} = \frac{6{,}008002\ m - 6\ m}{0{,}001\ s}$ = 8,002 m/s

$v_{[2,\ 2,0001]} = \frac{s(2{,}0001) - s(2)}{2{,}0001-2} = \frac{6{,}00080002\ m - 6\ m}{0{,}0001\ s}$ = 8,0002 m/s

À la limite la vitesse instantanée est de 8 m/s. Cette dernière correspond à la vitesse instantanée.

b) Cette vitesse instantanée correspond graphiquement à la pente de la tangente au point (2, s(2)) ou (2, 6).



Exercices 4.1

Pour ce faire faites un tableau lorsque x → 0^- et lorsque x → 0^+

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	… → 0^-
f(x)	1,999	1,999999	1,999999999	1,999999999999	… → 2

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	… → 0^+
f(x)	2,001	2,000001	2,000000001	2,000000000001	… → 2

$$\text{Donc, } \lim_{x\to 0} f(x) = 2 \quad ou \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x}{x} = 2$$

Ceci est normal car si nous factorisons le numérateur :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x^3+2)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(x^3+2) = 2\ si\ x \to 0$$

Exercices 4.2

Pour ce faire faites un tableau lorsque x → 5^- et lorsque x → 5^+

x	4,9	4,99	4,999	4,9999	… → 5^-
f(x)	0,2040816327	0,2004008016	0,200040008	0,2000040001	… → 0,2

x	5,1	5,01	5,001	5,0001	… → 5^+
f(x)	0,1960784314	0,1996007984	0,199960008	0,1999960001	… → 0,2

$$\text{Donc,} \lim_{x\to 5} f(x) = 0{,}2 \quad ou \quad \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-5x} = 0{,}2$$

Ceci est encore normal, car si nous factorisons le dénominateur :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x(x-5)}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \; si \; x \to 5$$

Exercices 5.1

$$\textbf{a)} \lim_{x\to 2} \frac{x^3}{5x^2+4} =$$

$$\frac{\lim_{x\to 2} x^3}{\lim_{x\to 2} 5x^2+4} = \qquad proposition\ 7$$

$$\frac{2^3}{\lim_{x\to 2} 5x^2 + \lim_{x\to 2} 4} = \qquad propositions\ 6\ et\ 4$$

$$\frac{2^3}{\left(\lim_{x\to 2} 5\right)\left(\lim_{x\to 2} x^2\right)+4} = \quad proposition\ 5\ et\ 1$$

$$\frac{2^3}{5\ x\ 2^2+4} = \qquad proposition\ 1\ et\ 6$$

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} [(7x - 3)(4x^2 - 1)] =$

$\left(\lim\limits_{x \to 1}(7x - 3)\right)\left(\lim\limits_{x \to 1}(4x^2 - 1)\right) = \qquad proposition\ 5$

$\left(\lim\limits_{x \to 1} 7x - \lim\limits_{x \to 1} 3\right)\left(\lim\limits_{x \to 1} 4x^2 - \lim\limits_{x \to 1} 1\right) = \qquad proposition\ 4$

$\left(7 \lim\limits_{x \to 1} x - 3\right)\left(4 \lim\limits_{x \to 1} x^2 - 1\right) = \qquad propositions\ 3\ et\ 1$

$(7\text{x}1 - 3)(4\text{x}1^2 - 1) =$ *propositions 2 et 6*

4 x 3 = 12

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right)^3 =$

$\left[\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 8$

$\left[\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 - 7x + 2}{\lim\limits_{x \to 0} 3x - 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 7$

$\left[\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 - \lim\limits_{x \to 0} 7x + \lim\limits_{x \to 0} 2}{\lim\limits_{x \to 0} 3x - \lim\limits_{x \to 0} 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 4$

$\left[\dfrac{3\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 7 \lim\limits_{x \to 0} x + 2}{3 \lim\limits_{x \to 0} x - 1}\right]^3 = \qquad propositions\ 3\ et\ 1$

$\left[\dfrac{3\text{x}0^2 - 7\text{x}0 + 2}{3\text{x}0 - 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 6\ et\ 2$

$\left[\dfrac{2}{-1}\right]^3 = -8$

Exercices 6.1

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 5x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} 5x = 5\ car\ x - 1 \neq 0$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 4}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2}{x - 2} = -\dfrac{1}{2}\ car\ x + 2 \neq 0$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2+x-10} = \lim_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(2x+5)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2x+5} = \dfrac{-1}{9}\ car\ x-2 \neq 0$

Exercices 6.2

a)$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\frac{1}{x}-1}$

$= \lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\frac{1-x}{x}}$ *dénominateur commun au dénominateur*

$= \lim_{x\to 1}\dfrac{x(x^2-1)}{(1-x)}$ en effectuant

$= \lim_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)(x-1)}{-(x-1)}$ carré parfait (numérateur)et mise en évidence simple de -1

$= \lim_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{-1}$ simplifiant car $\mathrm{x}-1 \neq 0$

$= \frac{2}{-1} = -2$

b) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x-\frac{25}{x}}{x-5} = \lim_{x\to 5}\dfrac{\frac{x^2-25}{x}}{x-5}$ *dénominateur commun*

$= \lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x(x-5)}$ en effectuant

$= \lim_{x\to 5}\dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)}$ carré parfait

$= \lim_{x\to 5}\dfrac{(x+5)}{x}$ simplifiant car $\mathrm{x}-5 \neq 0$

$= \frac{10}{5} = 2$

c) $\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})} \times \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur

par le conjugué du dénominateur.

$= \lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$ en effectuant

$= \lim_{x \to 5} (\sqrt{x} + \sqrt{5})$ *en simplifiant car* $x - 5 \neq 0$

= $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

d) $\lim_{x \to 36} \frac{36 - x}{\sqrt{x} - 6} \text{x} \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 6}$ *en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur*

$= \lim_{x \to 36} \frac{(36 - x)(\sqrt{x} + 6)}{x - 36}$ en effectuant

$= \lim_{x \to 36} \frac{-(x - 36)(\sqrt{x} + 6)}{x - 36}$ *mise en évidence simple de* -1 *au numérateur*

$= \lim_{x \to 36} -(\sqrt{x} + 6)$

= $-(\sqrt{36} + 6) = -12$

e) $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{((x + h)^2 - x^2)((x + h)^2 + x^2)}{h}$ *différence de carrés*

$= \lim_{h \to 0} \frac{((x + h) + x))((x + h) - x)(x^2 + 2xh + h^2 + x^2)}{h}$ *différence de carrés 1ère parenthèse et développement 2ème parenthèse*

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x + h)(h)(2x^2 + 2xh + h^2)}{h}$ *en effectuant*

$= \lim_{h \to 0} (2x + h)(2x^2 + 2xh + h^2)$ *en simplifiant*

= $2x \bullet 2x^2 = 4x^3$ *Si vous vous rendez jusqu'ici vos yeux doivent saigner… c'est normal.*

Exercice 6.3

a) Vérifions si *f(x)* est continue en *x = 4*

1ère condition: *f*(4) = 6

2ème condition:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 5$$

$$Donc,\ \lim_{x\to 4} f(x) = 5$$

3ème condition : $\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)\ car\ 5 \neq 6$

La fonction est donc discontinue en *x = 4*, car la 3ème condition est non respectée.

b) Vérifions si *f(x)* est continue en x = 2

1ère condition: *f(*2*)* = 5

2ème condition:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2+1 = 5$$

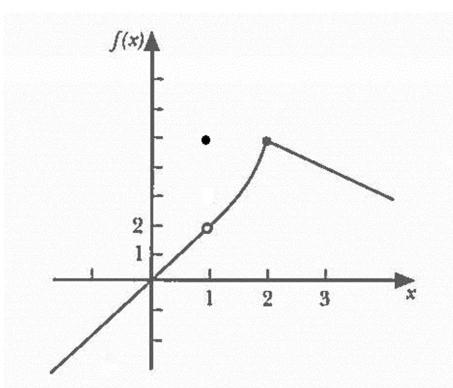
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (7-x) = 5$$

$$Donc,\ \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

3ème condition : $\lim_{x\to 2} f(x) =$
$f(2)\ la\ condition\ 2\ arrive\ au\ même\ résultat\ que\ la\ condition\ 1.$

La fonction est donc continue en *x* = 2, car les 3 conditions sont respectées.

La fonction *f* est représentée par le graphique ci-contre.



Exercices 7.1

a) $f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *par définition*

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 8 - \left(x^2 - 4x + 8\right)}{\Delta x}$ car $f(x) = x^2 - 4x + 8$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 8 - x^2 + 4x - 8}{\Delta x}$ *en développant*

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 4)}{\Delta x}$ mise en évidence simple du Δx

$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 4$ en simplifiant car $\Delta x \neq 0$

= 2x – 4 en évaluant la limite

b) $f\,'(5) = 2(5) - 4 = 6$

Exercices 7.2 :

a) $f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *par définition*

$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 1 - (3x+1)}{\Delta x}$ car $f(x) = 3x + 1$

$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 1 - 3x - 1}{\Delta x}$ *en développant*

$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$

$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 3$ en simplifiant car $\Delta x \neq 0$

f ’(x) = 3 en évaluant la limite

b) f’(2) = 3

Exercices 8.1

a) Si *f*(x) = 7, alors *f* ’(x) = 0 (proposition 1)

b) Si f(x) = $4x^{3/2}$, alors f'(x) = $\frac{3}{2}(4)x^{\frac{3}{2}-1}$ = $6x^{1/2}$ = $6\sqrt{x}$ (Proposition 3)

c) Si f(x) = $2x^7$, alors f'(x) = $7(2)x^{7-1}$ = $14x^6$ (Proposition 3)

Exercices 8.2

a) Si f(x) = $-9x^1$, alors f'(x) = $(1)(-9)x^{1-1}$ proposition 3

= $-9x^0$

= -9

b) Si f(x) = $3x^1 + 2$, alors f'(x) = (3x)' + (2)' proposition 4

= $(1)(3)x^{1-1} + 0$ propositions 3 et 1

= 3

c) Si f(x) = $4x^2 + 24x + 10$, alors f'(x) = $(4x^2)' + (24x)' + (10)'$ proposition 4

= 8x + 24

d) Si f(x) = $3x^{-1} + x^2$, alors f'(x) = $(3x^{-1})' + (x^2)'$ proposition 4

= $-3x^{-2} + 2x$ proposition 3

= $\frac{-3}{x^2} + 2x$

e) Si f(x) = $x^4 + \frac{1}{x^4}$, alors f'(x) = $(x^4)' + \left(\frac{1}{x^4}\right)'$ proposition 4

= $4x^3 + (x^{-4})'$ proposition 3 et j'ai seulement changé $\frac{1}{x^4}$ *par* x^{-4}

= $4x^3 + -4x^{-5}$ proposition 3

= $4x^3 - \frac{4}{x^5}$

f) Si f(x) = $x^7 - 3x^5 - \frac{x^3}{3} + 1$, alors f'(x) = $(x^7)' - (3x^5)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (1)'$ proposition 4

= $7x^6 - 15x^4 - \frac{3x^2}{3} + 0$ proposition 3

= $7x^6 - 15x^4 - x^2$

g) Si f(x) = (2x + 1)(x + 1), alors f ’(x) = (2x + 1)’ (x + 1) + (2x + 1) (x + 1)’   proposition 5

= 2(x + 1) + (2x + 1) (1)   propositions 3 et 1

= 2x + 2 + 2x + 1 = 4x + 3

h) Si f(x) = $\frac{-5}{x^5}$, alors f ’(x) = $\frac{(-5)'(x^5)-(-5)(x^5)'}{(x^5)^2}$ proposition 6

= $\frac{0(x^5)-(-5)(5x^4)}{x^{10}}$ propositions 1 et 3

= $\frac{25x^4}{x^{10}}$ = $\frac{25}{x^6}$

i) Si f(x) = $\frac{3}{x-1}$, alors f ’(x) = $\frac{(3)'(x-1) -3(x-1)'}{(x-1)^2}$ proposition 6

= $\frac{0\ (x-1) -3(1)}{(x-1)^2}$ proposition 1 et 2

= $\frac{-3}{(x-1)^2}$

j) Si f(x) = $\sqrt{x}$ (2x^2 + 7x + 4), alors f ’(x) = ($\sqrt{x}$)’(2x^2 + 7x + 4) + $\sqrt{x}$ (2x^2 + 7x + 4)’ proposition 5

= $\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ (2x^2 + 7x + 4) + $\sqrt{x}$ [(2x^2)’ + (7x)’ + (4)’   propositions 3 et 4

=$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$ (2x^2 + 7x + 4) + $\sqrt{x}$ [4x + 7 + 0]   proposition 3

= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$(2x^2 + 7x + 4) + $\sqrt{x}$ (4x + 7)

Exercice 9.1

Évaluons la limite pour x = -3, car si x = -3 le dénominateur de la fonction est nul. Je peux vérifier pour -3$^-$ **ou** pour -3$^+$, si l’une ou l’autre donne +∞ ou -∞, la fonction possèdera une asymptote verticale en x = -3.

Vérifions pour -3$^+$.

$$\text{b)} \lim_{x \to -3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \quad \text{b)} \lim_{x \to -3^+} \frac{-12}{(-2.99999\ldots)^2-9} = \frac{-12}{-0{,}00000\ldots1} = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

Il y a donc une asymptote verticale en x = -3.

Évaluons maintenant la limite pour x = 3, car si x = 3 le dénominateur de la fonction est aussi nul. Je peux vérifier pour 3^- **ou** pour 3^+, si l'une ou l'autre donne +∞ ou -∞, la fonction possèdera une asymptote verticale en x = 3.

Vérifions pour 3^+

$$\text{b) } \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} \; donc \; indétermination$$

Nous devons donc lever cette indétermination en factorisant.

$$\text{b) } \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En calculant aussi

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{1}{3}$$

Donc, x = 3 n'est pas une asymptote verticale puisque le résultat de la limite n'est pas +∞ ou -∞.

Exercice 9.2

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \; est \; une \; indétermination \; de \; la \; forme \; \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{5}{2}$$

En calculant aussi

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \frac{5}{2}$$

Donc, x = 3 n'est pas une asymptote verticale puisque le résultat de la limite n'est pas +∞ ou -∞.

Exercice 9.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2-1}{5x^2+6x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(10-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(10-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\left(10-\frac{1}{(+\infty)^2}\right)}{\left(5+\frac{6}{+\infty}+\frac{1}{(+\infty)^2}\right)}$$

$$=\frac{(10-0)}{(5+0+0)}=2$$

Donc, comme la limite égale un nombre réel, cette fonction possède une asymptote horizontale dont l'équation y = 2.

Exercice 9.4

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16}\ \ \textit{est une indétermination}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-2-\frac{12}{-\infty}\right)}{\left(1+\frac{8}{-\infty}+\frac{16}{(-\infty)^2}\right)}=\frac{-2}{1}=-2$$

Donc, comme la limite égale un nombre réel, cette fonction possède une asymptote horizontale dont l'équation y = -2.

Exercice 10.1

Nous désirons trouver la dérivée de l'équation implicite du cercle : $x^2+y^2=16$

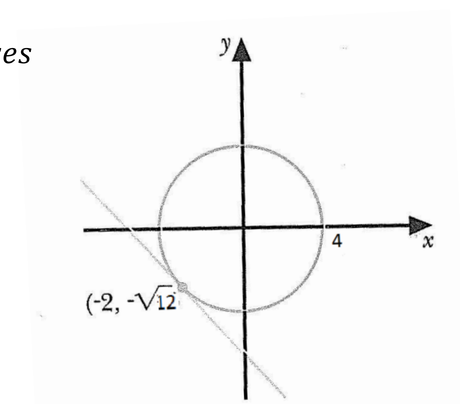
$(x^2+y^2)'=(16)'$ *Dérivées des deux membres*

$(x^2)'+(y^2)'=(16)'$ *Proposition* 4

$2x+2yy'=0$ Proposition 3 et 1

$2yy'=-2x$

$$y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$



Je tiens à vous rappeler que la dérivée $\boldsymbol{y'}$ représente la pente de la tangente

en un point du cercle. Par exemple, pour évaluer la pente de la tangente au point (-2, $-\sqrt{12}$) du cercle, il suffit de remplacer, dans l'expression de ***y'***, x par -2 et y par $-\sqrt{12}$. Ainsi,

Pente de la tangente au point (-2, $-\sqrt{12}$) = $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-2,\,-\sqrt{12})}$ = $y'_{(-2,\,-\sqrt{12})}$ = $\frac{-2}{\sqrt{12}}$

Exercice 10.2

Calculons la dérivée de $5x^3 + 2xy^4 = 3x^2y^3$

$(5x^3 + 2xy^4)' = (3x^2y^3)'\textit{dérivée des } 2 \textit{ membres}$

$(5x^3)' + (2xy^4)' = (3x^2y^3)' \quad \textit{proposition } 3$

$(5x^3)' + (2x)'y^4 + 2x(y^4)' = (3x^2)'y^3 \ + 3x^2(y^3)' \quad \textit{proposition } 5$

$15x^2 + 2y^4 + 2x4y^3y' = 6xy^3 + 3x^2 3y^2y' \quad \textit{proposition } 3$

$15x^2 + 2y^4 + 8xy^3y' = \ 6xy^3 + 9x^2y^2y'$

$8xy^3y' - 9x^2y^2y' = 6xy^3 - 15x^2 - 2y^4 \ \textit{isole } y'$

$y'(8xy^3 - 9x^2y^2) = 6xy^3 - 15x^2 - 2y^4$

$$y' = \frac{6xy^3 - 15x^2 - 2y^4}{8xy^3 - 9x^2y^2}$$

Exercice 11.1

a) 1ère étape :

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

D'où; *f'(x)* = 4x$(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$ en factorisant

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0 \ si\ x = -1, x = 0 \ ou\ x = 1$ d'où $-1, 0$ et 1 sont des nombres critiques

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : tableau de variation

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	–	0	+	0	–	0	+
f(x)	↘	-6	↗	-5	↘	-6	↗

b) 1ère étape :

$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\ x' \qquad \textit{proposition } 7\ \textit{chap}. 10$

D'où $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

2) $f'(x)$ n'existe pas si x = 0 d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : tableau de variation

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+	∄	+
f(x)	↗	2	↗

Exercice 11.2

a)

1ère étape : $f'(x) = -2x + 5$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = \frac{5}{2}$, d'où $x = \frac{5}{2}$ est un nombre critique

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	$\frac{5}{2}$	+∞
f'(x)	+	0	−
f	↗	13,25	↘
		Max	

Donc, *y* = 13,25 est un maximum

b)

1ère étape : $f'(x) = 20x^4 - 20x^3$

$f'(x) = 20x^3(x-1) \qquad en\ factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0\ ou\ x = 1$, d'où 0 et x = 1 sont des nombres critiques

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	0		1	+∞
f'(x)	+	0	−	0	+
f	↗	9	↘	8	↗
		Max		**Min**	

Donc, *y* = 9 est un maximum et *y* = 8 est un minimum

$c)\ f(x) = 3 - (x+2)^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : $f'(x) = \frac{-2}{3}(x+2)^{\frac{-1}{3}}(x+2)'$ $\quad\quad$ $proposition\ 7\ chap.10$

$= \frac{-2}{3(x+2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x+2}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0$ $pour\ aucun\ x$

2) $f'(x)$ n'existe pas si x = -2 d'où -2 est un nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	-2	+∞
f'(x)	+	∄	−
f	↗	3	↘
		Max	

Donc, *y* = 3 est un maximum

Exercice 11.3

a) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 9$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 12x^5 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^4 - 60x^2$

$= 60x^2(x^2-1) = 60x^2(x-1)(x+1)$ $\quad\quad$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si *x* = 0 , $x = 1$ ou $x = -1$ d'où $-1, 0$ et 1 $sont\ des$ nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	-1		0		1	+∞
f''(x)	+	0	−	0	−	0	+
f	∪	6	∩	9	∩	6	∪

F est concave vers le haut sur -∞, -1] ∪[1, +∞ et

F est concave vers le bas sur [-1,0] ∪ [0,1] donc de [-1,1]…

$b)\ f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-1)' \qquad \textit{proposition 7 chap. } 10$

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x-1)^{\frac{-4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ pour aucun x.

2) $f''(x)$ n'existe pas si $x = 1$ d'où 1 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	1	+∞
f''(x)	+	∄	+
f	∪	2	∪

f est donc concave vers le haut sur $\mathbb{R}$

*f n'*est jamais concave vers le bas.

Exercice 11.4

$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2$

$\quad = 60x^2(x-1)$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$ d'où 0 et 1 $sont$ des nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	0		1	+∞
f''(x)	–	0	–	0	+
f	∩	1	∩	-1	∪
				inflexion	

Le point (1, -1) est un point d'inflexion.

Exercice 11.5

a) $f(x) = -x^5 + 7 + 5x$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$f'(x) = -5x^4 + 5$

$= -5(x^4 - 1) = -5(x^2 - 1)(x^2 + 1) \;\; -5(x-1)(x+1)(x^2+1) \;\; en\ factorisant$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 1\ et\ x = -1, d'où - 1\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$f''(x) = -20x^3$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ si\ x = 0\ d'où\ 0\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	−	0	+	+	+	0	−
f''(x)	+	+	+	0	−	−	−
f	↘ et ∪	3	↗ et ∪	7	↗et ∩	11	↘ et ∩
Allure et points		(-1, 3)		(0, 7)		(1, 11)	
		Min		**Inflexion**		**Max**	

$b)\ f(x) = \sqrt{x^3} - 3x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$

Remarque le *dom f* = [0, +∞, car x ne peut pas être négatif par la présence de la racine carrée…

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 \quad = \frac{3\sqrt{x}}{2} - 3$$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 4, d'où\ 4\ est\ un\ nombre\ critique.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

2) $f''(x)$ n'existe pas si $\mathrm{x} = 0$ d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	0		4	+∞
f'(x)	−	−	0	+
f''(x)	∄	+	+	+
f	1	↘ et ∪	-3	↗ et ∪
Allure et points	(0, 1)		(4, -3)	
	Max		**Min**	

$c)\ f(x) = 5x - 4\sqrt[3]{x^2} = 5x - 4x^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$$f'(x) = 5 - \frac{8}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 5 - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

Nombres critiques :

$1)\ f'(x) = 0\ si\ x = \frac{512}{3375}, d'où\ \frac{512}{3375}\ est\ un\ nombre\ critique.$

$2)\ f'(x)\ n'existe\ pas\ si\ x = 0\ d'où\ 0\ est\ un\ nombre\ critique$

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$$f''(x) = \frac{8}{9}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{8}{9x^{\frac{4}{3}}} = \frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Nombres critiques :

$1)\ f''(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

$2)\ f''(x)\ \text{n'existe pas si x} = 0\ \text{ d'où 0 est un nombre critique}$

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	0		$\frac{512}{3375}$	+∞
f'(x)	+	∄	−	0	+
f''(x)	+	∄	+	+	+
f	↗ et ∪	0	↘ et ∪	-0,379…	↗ et ∪
Allure et points		(0, 0)		($\frac{512}{3375}$, -0,379…)	
		Max		**Min**	

$d)\ f(x) = x^5 + x^3 + 2x$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$

Nombres critiques :

$1)\ f'(x) = 0\ pour\ aucun\ x\ car\ si\ 0 = 5x^4 + 3x^2 + 2$

Alors, $-2 = 5x^4 + 3x^2\ ce\ qui\ impossible\ car\ 5x^4 + 3x^2\ est\ toujours\ positif.\ En\ effet,$ $les\ exposants\ des\ x\ de\ ces\ deux\ monômes\ sont\ pairs \ldots$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3) \quad en\ factorisant$

Nombres critiques :

$1)\ f''(x) = 0\ si\ x = 0\ d'où\ 0\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+	+	+
f''(x)	−	0	+
f	↗∩	0	↗ et ∪
Allure et points		(0, 0)	
		Inflexion	

Exercice 12.1

a) $f(x) = 7^{x^3-2x}$

$f'(x) = 7^{x^3-2x} \ln 7\,(3x^2 - 2) = (3x^2 - 2)\,7^{x^3-2x} \ln 7$

b) $f(x) = x^5\,8^x$

$f'(x) = 5x^4 8^x + x^5\,8^x \ln 8$ *Proposition 5 chapitre 8 et proposition 1 chapitre 12*

$\quad = 8^x\,(5x^4 + x^5 \ln 8) \qquad en\ factorisant$

c) $f(x) = \frac{2x}{5^x + 11^x}$

$f'(x) = \frac{2(5^x + 11^x) - 2x(5^x \ln 5 + 11^x \ln 11)}{(5^x + 11^x)^2}$ $\quad propositions\ 6\ et\ 4\ du\ chapitre\ 8$ et *proposition 1 du chapitre 12*

Exercice 12.2

a) $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$

$f'(x) = e^{2x}\,(2) - e^{-3x}\,(-3) = 2e^{2x} + 3e^{-3x}$ $proposition\ 4\ chapitre\ 12$

b) $f(x) = 2^{3^x + e^x}$

$f'(x) = 2^{3^x + e^x} \ln 2\,(3^x + e^x)'$ $\quad proposition\ 2\ chapitre\ 12$

$= 2^{3^x + e^x} \ln 2\,(3^x \ln 3 + e^x)$ $\quad propositions\ 1\ et\ 3\ du\ chapitre\ 12$

Exercice 12.3

$a)$ $f(x) = \log_6 x + \log_5 x$

$f'(x) = \frac{1}{x \ln 6} + \frac{1}{x \ln 5}$ $\quad proposition\ 7\ chapitre\ 12$

b) $f(x) = \frac{\ln x^6}{x^6}$

$$f'(x) = \frac{(\ln x^6)'(\,x^6) - (\ln x^6)(x^6)'}{(x^6)^2}$$

$$= \frac{\frac{6x^5}{x^6} x^6 - (\ln x^6)(6x^5)}{x^{12}}\ propositions\ 6\ chapitre\ 10\ et\ 6\ chapitre\ 12$$

$$= \frac{6x^5 - (\ln x^6)(6x^5)}{x^{12}}$$

$$= \frac{6x^5(1 - \ln x^6)}{x^{12}} = \frac{6(1 - \ln x^6)}{x^7}$$

c) $f(x) = x^2 \log_5 x$

$$f'(x) = (x^2)' \log_5 x + x^2(\log_5 x)' = 2x\log_5 x + x^2 \frac{1}{x \ln 5} = 2x\log_5 x + \frac{x}{\ln 5}$$

Proposition 5 chapitre 10 et proposition 7 chapitre 12

$= \ x(2\log_5 x + \frac{1}{\ln 5})$

d) $f(x) = \ \log_5(2x^5 + 3)$

$f'(x) = \frac{10x^4}{(2x^5+3)\ln 5} \qquad \mathit{proposition}\ 8\ \mathit{chapitre}\ 12$

e) $f(x) = \ x^7 ln^3 x$

$f(x) = (x^7)'(ln^3x) + \ x^7(ln^3x)' = 7x^6(ln^3x) + x^7 3\ln^2 x\ (\ln x)'$

Proposition 5 chapitre 10

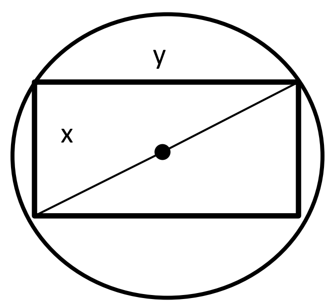
$$= 7x^6(ln^3x) + x^7 3\ln^2 x\ \frac{1}{x} = \ 7x^6(ln^3x) + 3x^6\ln^2 x$$

Proposition 5 chapitre 12

$= \ x^6\ln^2 x(7\ln x + 3)$

Exercice 13.1

a) Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire sera maximale à inscrire dans un cercle de rayon de 5 cm.



- 1) Définir les variables

x : Hauteur

y : Largeur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = xy

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Comme le diamètre du cercle est de 10 cm, par Pythagore : $x^2 + y^2 = 10^2$

$Donc, \qquad y^2 = 100 - x^2\ alors\ y = \ \sqrt{100 - x^2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

Comme A(x, y) = xy

Alors, A(x, y) = $x\left(\sqrt{100-x^2}\right)$

Remarque : $100 - x^2 \geq 0\ donc, 100 \geq x^2 d'où\ x \leq 10$
Donc, *dom* A = [0, 10]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée première, car trouver A'' sera assez pénible et plus long…

1ère étape : $A'(x) = (x)'\left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\sqrt{100-x^2}\right)'$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{2}(100-x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)(100-x^2)'$$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{2}(100-x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)(-2x)$$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + \frac{-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{(100-x^2)}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Donc, $A'(x) = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = \sqrt{50}\ et\ x = -\sqrt{50}\ (impossible\ car\ mesure\ négative\ de\ côté)$,

d'où $\sqrt{50}$ est un nombre critique

2) $A'(x)$ n'existe pas si x = 10 et x = −10 ($impossible\ car\ mesure\ négative\ de\ côté$)

d'où 10 est un nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	0		$\sqrt{50}$		10
A'(x)	∄ (car pas de base…)	+	0	−	∄ (car pas de hauteur)
A		↗	50	↘	
			Max		

- 6) Formuler la réponse

L'aire du rectangle est maximale lorsque x = $\sqrt{50}$

Comme $y = \sqrt{100 - x^2}$ alors $y = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2}$ $alors, y = \sqrt{50}$

Les dimensions recherchées sont donc de $\sqrt{50}$m par $\sqrt{50}$m. Aire = $\sqrt{50}x\sqrt{50} = 50cm^2$

b) La somme de deux nombres positifs est 140. Quels sont ces deux nombres si le carré du premier ajouté au deuxième donne une somme minimale.

- 1) Définir les variables

x : premier nombre

y : deuxième nombre

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

S(x, y) = $x^2 + y$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Somme : *x + y = 140* d'où $y = 140 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

  S(x, y) = $x^2 + y = x^2 + (140 - x)$

  Comme la somme de deux nombres positifs est positives dom *S* =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $S'(x) = 2x - 1$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *S.*

1) $S'(x) = 0$ si $x = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2}$ est un nombre critique

2) $S'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *S''(x)*

$S''(x) = 2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$S''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ donc\ \boldsymbol{S''}\left(\frac{1}{2}\right) > \boldsymbol{0}\ donc\ \left(\frac{1}{2}, S\left(\frac{1}{2}\right)\right)\ est\ un\ minimum\ de\ S.$

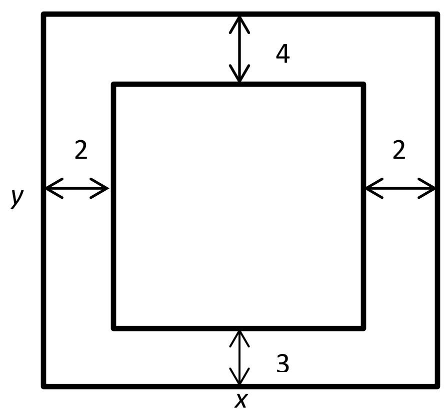
- 6) Formuler la réponse

Si x = $\frac{1}{2}$ alors y = ?

Comme $y = 140 - x$, alors $y = 140 - \frac{1}{2}$, alors y = 139,5

Le 1er nombre est 0,5 et le deuxième est 139,5

c) Une feuille a un périmètre de 110 cm. Si cette page comprend des marges de 4 cm en haut, de 3cm en bas et de 2 cm sur les deux côté, quelles dimensions la page doit-elle avoir pour que sa surface soit maximale.



- 1) Définir les variables

x : largeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = $(x - 4)(y - 7)$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre : 2*x + 2y = 110* d'où $y = 55 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

A(x, y) = $(x-4)(y-7)$ *=* $(x-4)((55-x)-7)$

D'où A(x, y) = $(x-4)(48-x)$

Comme l'aire doit être positive x ≥ 4 et x ≤ 48, donc dom *A* = [4, 48]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

A(x, y) = $-x^2+52x-192$ *en développant* $(x-4)(48-x)$

1ère étape : $A'(x)=-2x+52$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x)=0\ si\ x=26$, d'où 26 est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer A*''(x)*

$A''(x)=-2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$A''(26)=-2\ donc\ \boldsymbol{A}''(26)<\mathbf{0}\ donc\ \big(26, A(26)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ A.$

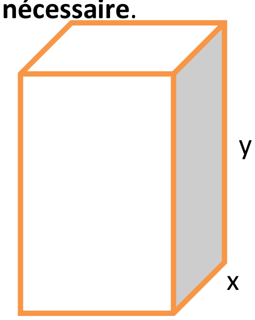
- 6) Formuler la réponse

Si x = 26 alors y = ?

Comme $y=55-x$, alors $y=55-26$, alors y = 29

Les dimensions sont donc de 26 cm de largeur et de 29 cm de hauteur.

d) Une boîte en or à base carrée et ouverte sur le dessus a un volume de 36 cm³. Déterminer les dimensions que doit avoir cette boîte pour que la quantité d'or nécessaire à sa fabrication soit minimale et évaluer cette quantité minimale d'or nécessaire.



- 1) Définir les variables

x : largeur et profondeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

Q(x, y) = 4xy + x^2 *(4 surfaces rectangulaire et une base)*

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Volume : $x^2y = 36$ d'où $y = \frac{36}{x^2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

$Q(x, y) = 4xy + x^2$

$= 4x\left(\frac{36}{x^2}\right) + x^2$

$= \frac{144}{x} + x^2$

$D'\text{où } Q(x,y) = \frac{144}{x} + x^2$

Note : puisque x représente la longueur d'un côté donc, $x > 0$ ou *dom* Q =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

1ère étape : $Q'(x) = \frac{(144)'x - 144(x)'}{x^2} + 2x$

$$= \frac{-144}{x^2} + 2x$$

$$D'\text{où } Q'(x) = \frac{-144}{x^2} + 2x$$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *Q.*

1) $Q'(x) = 0 \; si \; x = \sqrt[3]{72}$, d'où $\sqrt[3]{72}$ est un nombre critique

2) $Q'(x)$ n'existe pas si $x = 0$

$(impossible\ car\ mesure\ nulle\ d'un\ côté\ ferait\ que\ le\ prisme\ n'existerait\ tout\ simplement\ pas\ \ldots)$

3ème étape : calculer Q*''(x)*

$$Q''(x) = \frac{(-144)'x^2 - (-144)(x^2)'}{x^4} + 2$$

$$= \frac{144(2x)}{x^4} + 2$$

D'où Q''(x)= $\frac{288}{x^3} + 2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$Q''(\sqrt[3]{72}) = 6 \; donc \; \boldsymbol{Q''}(\sqrt[3]{72}) > \mathbf{0} \; donc \; \left(\sqrt[3]{72}, Q(\sqrt[3]{72})\right) \; est\ un\ minimum\ de\ A.$

- 6) Formuler la réponse

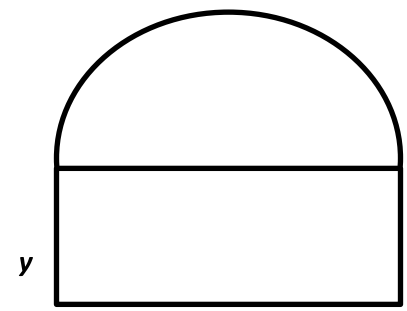
Si x = $\sqrt[3]{72}$ alors y = ?

Comme $y = \frac{36}{x^2}$, alors $y = \frac{36}{(\sqrt[3]{72})^2}$, alors y = 2,08

Les dimensions sont donc de $\sqrt[3]{72}\ cm\ par\ \sqrt[3]{72}\ cm\ par\ 2{,}08\ cm$

La quantité d'or nécessaire est de *Q(x, y) = 4xy +* x^2 *= 51,92* cm^2

e) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle est de 8m, déterminer les dimensions de la fenêtre d'aire maximale.



- 1) Définir les variables

x : Base du rectangle

y : Hauteur du rectangle

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = xy + $\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$ **:** *Aire rectangle + aire demi-cercle*

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre rectangle : $2x + 2y = 8$

d'où $y = 4 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

A(x, y) = xy + $\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x(4-x) + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x(4-x) + \frac{\pi\frac{x^2}{4}}{2}$

D'où A(x, y) = $4x - x^2 + \frac{\pi x^2}{8}$

Comme la x représente la base, x > 0 *dom A* =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $A'(x) = 4 - 2x + \frac{2\pi x}{8} = 4 - 2x + \frac{\pi x}{4} = 4 - x\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$ *en factorisant*

D'où : $A'(x) = 4 - \left(\frac{8-\pi}{4}\right)x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = \dfrac{16}{8-\pi}$, d'où $\dfrac{16}{8-\pi}$ est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *A''(x)*

$$A''(x) = -\left(\frac{8-\pi}{4}\right)$$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$A''\left(\frac{16}{8-\pi}\right) = -\left(\frac{8-\pi}{4}\right)$$

$$donc\ \boldsymbol{A''}\left(\frac{16}{8-\pi}\right) < \mathbf{0}\ donc\ \left(\frac{16}{8-\pi}, A\left(\frac{16}{8-\pi}\right)\right)\ est\ un\ maximum\ de\ A.$$

- 6) Formuler la réponse

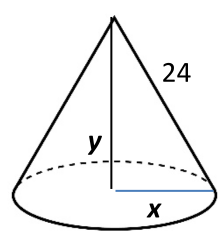
Si x = $\frac{16}{8-\pi}$ alors y = ?

Comme $y = 4 - x$, alors $y = 4 - \frac{16}{8-\pi}$, alors $y = \frac{4(8-\pi)-16}{8-\pi} = \frac{32-4\pi-16}{8-\pi}$ d'où y $= \frac{16-4\pi}{8-\pi}$

La base du rectangle est $\frac{16}{8-\pi}$ et la hauteur du rectangle est $\frac{16-4\pi}{8-\pi}$. La hauteur de la fenêtre est de $\frac{16-4\pi}{8-\pi}$ + le rayon du demi-cercle ($\frac{x}{2} = \frac{(16/(8-\pi))}{2} = \frac{8}{8-\pi}$)

La hauteur de la fenêtre est de : $\frac{16-4\pi}{8-\pi} + \frac{8}{8-\pi} = \frac{16-4\pi+8}{8-\pi} = \frac{24-4\pi}{8-\pi}\ m$

f) On forme un cône dont l'apothème est de 24 cm. Déterminer la hauteur du cône si son volume doit être maximal.



- 1) Définir les variables

x : rayon de la base circulaire

y : hauteur du cône

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

V(x, y) = $\frac{\pi x^2 y}{3}$ *car volume cône =* $\frac{A_b\, x\, h}{3}$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Pythagore : $x^2 + y^2 = 24^2$

D'où $\mathrm{x}^2 = 576 - \mathrm{y}^2$: J'aime mieux isoler x^2 car dans $\mathrm{V(x,\ y)} = \frac{\pi \mathrm{x}^2 \mathrm{y}}{3}$, il sera plus facile de substituer x^2 par $576 - \mathrm{y}^2$ que $\mathrm{y} = \sqrt{576 - \mathrm{x}^2}$…

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

  V(x, y) = $\frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi(576 - y^2)y}{3} = \frac{(576\pi - \pi y^2)y}{3}$

  D'où V(x, y) = $\frac{576\pi y - \pi y^3}{3}$

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $V'(y) = \frac{576\pi - 3\pi y^2}{3}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *V.*

1) $V'(y) = 0\ si\ x = \sqrt{\frac{576}{3}}$, d'où $\sqrt{\frac{576}{3}}$ est un nombre critique

2) $V'(y)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *V''(y)*

$$V''(y) = \frac{-6\pi y}{3}$$

D'où $V''(y) = -2\pi y$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$V''\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right) = \ -2\pi\sqrt{\frac{576}{3}}$$

$$donc\ \boldsymbol{V}''\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right) < \boldsymbol{0}\ donc\ \left(\sqrt{\frac{576}{3}}, V\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right)\right)\ est\ un\ maximum\ de\ V.$$

- 6) Formuler la réponse

La hauteur du cône est y = $\sqrt{\frac{576}{3}}$ cm

Exercice 14.1

$a)\ f(x) = x^4 sinx$ alors,

$f'(x) = \ (x^4)'sinx + \ x^4(sinx)'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = 4x^3 sinx + x^4 \cos x$

b) $f(x) = sin\frac{x^2}{x-1}$ alors,

$f'(x) = \ [cos\ f(x)]f'(x)$ *Proposition 1'*

$$f'(x) = \left[cos\ \frac{x^2}{x-1}\right]\frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} \qquad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \left[cos\ \frac{x^2}{x-1}\right]\frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \qquad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}cos\left(\frac{x^2}{x-1}\right)\ par\ pur\ esthétisme\ ...$$

c) $f(x) = xsin^5(x^2 - 6)$ alors,

$f'(x) = (x)'sin^5(x^2 - 6) + x(sin^5(x^2 - 6))'$ *Dérivée d'un produit*

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\ [5sin^4(x^2 - 6)][\sin(x^2 - 6)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\,[5sin^4(x^2 - 6)][\cos(x^2 - 6)](x^2 - 6)'$ $proposition 1'$

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + x\,[5sin^4(x^2 - 6)][\cos(x^2 - 6)]2x$

$f'(x) = sin^5(x^2 - 6) + 10x^2\, sin^4(x^2 - 6)\cos(x^2 - 6)$

d) $f(x) = \frac{1}{sinx}$ alors,

$f'(x) = [(sinx)^{-1}]'$

$f'(x) = -sin^{-2}x\,(sinx)'$

$f'(x) = -sin^{-2}x\cos x$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{sin^2 x}$$

Exercice 14.2

a) $f(x) = cos2x - cos^3x$ alors,

$f'(x) = (cos2x)' - (cos^3x)'$

$f'(x) = (-sin2x)2 - 3(cos^2x)(cosx)'$ *Proposition* $2'$ *et dérivation en chaîne*

$f'(x) = -2sin2x - 3(cos^2x)(-sinx)$ *Proposition* 2

$f'(x) = -2sin2x + 3cos^2x\; sinx$

b) $f(x) = \frac{3x}{cosx}$ alors,

$f'(x) = \frac{(3x)'cosx - 3x\,(cosx)'}{cos^2x}$ *Dérivée d'un quotient*

$f'(x) = \frac{3cosx - 3x\,(-sinx)}{cos^2x}$ *Proposition 2*

$$f'(x) = \frac{3cosx + 3xsinx}{cos^2x}$$

c) $f(x) = \ cos^4(2x^5 - 3)$ alors,

$f'(x) = \ 4cos^3(2x^5 - 3)[\cos(2x^5 - 3)]'$ *Dérivation en chaîne*

$f'(x) = \ 4cos^3(2x^5 - 3)[-sin(2x^5 - 3)](2x^5 - 3)'$ *Proposition 2'*

$f'(x) = \ 4cos^3(2x^5 - 3)[-\sin(2x^5 - 3)](10x^4)$

$f'(x) = \ -40x^4cos^3(2x^5 - 3)\sin\,(2x^5 - 3)$

Exercice 14.3

$a)\ f(x) = \cos(x^4 + sinx)\ \ alors,$

$f'(x) = -\sin(x^4 + sinx)(\,x^4 + sinx)' \quad Proposition\ 2'$

$f'(x) = \sin(x^4 + sinx)(\,4x^3 + cosx) \quad Proposition\ 1$

b) $f(x) = \cos(sinx) - sin(cosx)$ alors,

$f'(x) = -\sin(sinx)\,(sinx)' - cos(cosx)(cosx)'$ Proposition 1' et 2'

$f'(x) = -\sin(sinx)\,cosx - cos(cosx)(sinx)$

$f'(x) - cosx\,\sin(sinx) - sinx\ cos(cosx)$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\,(-x^3)$ alors,

$$f'(x) = \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]'\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[\cos\,(-x^3)]' \quad d\acute{e}riv\acute{e}e\ d'un\ produit$$

$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[-\sin(-x^3)](-x^3)'$ *Propositions 1' et 2'*

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{(1)'\sqrt{x} - 1\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}^2}\cos(-x^3) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)[-\sin(-x^3)](-3x^2) \quad D\acute{e}riv\acute{e}e\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{0 - 1\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{x}\ \cos\bigl(-x^3\bigr) + \ 3x^2\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2}\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)}{x}\ \cos\left(-x^3\right) + \ 3x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}\ \cos\left(-x^3\right) + \ 3x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)\cos\left(-x^3\right) + \ 3x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(-x^3\right) + \ 3x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(-x^3)$$

Exercice 14.4

a) $f(x) = \sec(3x) + \tan(2x^3 - 5x) \quad alors,$

$f'(x) = [\sec(3x)]' + [\tan(2x^3 - 5x)]'$

$f'(x) = \sec(3x)\tan 3x\ (3x)' + sec^2(2x^3 - 5x)(2x^3 - 5x)' \quad Propositions\ 5' et\ 3'$

$f'(x) = \sec(3x)\tan 3x\ (3) + sec^2(2x^3 - 5x)(\ 6x^2 - 5) \quad Propositions\ 5' et\ 3'$

$f'(x) = 3\sec(3x)\tan 3x\ + (6x^2 - 5)\ sec^2(2x^3 - 5x) \quad Propositions\ 5' et\ 3'$

b) $f(x) = \sin[\cos(2x)] \quad alors,$

$f'(x) = cos[\cos(2x)][\cos(2x)]' \qquad Proposition\ 2'$

$f'(x) = cos[\cos(2x)]\ [-\sin(2x)]\ (2x)' \quad Proposition\ 1'$

$f'(x) = cos[\cos(2x)]\ [-\sin(2x)]\ (2)$

$f'(x) = -2cos[\cos(2x)]\sin(2x)$

c) $f(x) = \ \sqrt{\cot x} + \sec x$ comme,

$f(x) = \ (\cot x)^{\frac{1}{2}} + \sec x \quad alors,$

$f'(x) = \ \frac{1}{2}cot^{\frac{-1}{2}}x\ (\cot x)' + \sec\ x\tan\ \ x\ \ Dérivation\ en\ chaîne\ et\ \ proposition\ 5$

$$f'(x) = \frac{1}{2}cot^{\frac{-1}{2}}x(-csc^2x)\sec x \tan x \qquad Proposition\ 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\ cot^{\frac{1}{2}}x}(-csc^2x)\sec x \tan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cot x}}(-csc^2x)\sec x \tan x$$

$$f'(x) = \frac{(-csc^2x)\sec x \tan x}{2\sqrt{\cot x}}$$

d) $f(x) = tan^2 3x + sec^4(5x) \quad alors,$

$$f'(x) = [tan^2(3x)]' + [sec^4(5x)]'$$

$$f'(x) = 2\tan(3x)\,[\tan(3x)]' + 4sec^3(5x)[\sec(5x)]' \quad Dérivations\ en\ chaîne$$

$$f'(x) = 2\tan(3x)\,sec^2(3x)(3x)' + 4sec^3(5x)\sec(5x)\tan(5x)\,(5x)' \ Propositions\ 3' et\ 5'$$

$$f'(x) = 2\tan(3x)\,sec^2(3x)(3) + 4sec^3(5x)\sec(5x)\tan(5x)\,(5)$$

$$f'(x) = 6\tan(3x)\,sec^2(3x) + 20sec^4(5x)\tan(5x)$$

e) $f(x) = 7x^3 - 4\sin(3x) + \csc(2-x^3)\,, alors$

$$f'(x) = 21x^2 - 4\cos(3x)(3x)' - \csc(2-x^3)\cot(2-x^3)(2-x^3)' \ \ propositions\ 2' \ et\ 6'$$

$$f'(x) = 21x^2 - 4\cos(3x)(3) - \csc(2-x^3)\cot(2-x^3)(-3x^2)$$

$$f'(x) = 21x^2 - 12\cos(3x) + 3x^2\csc(2-x^3)\cot(2-x^3)$$

f) $f(x) = \cot\left(\frac{x+5}{x-1}\right) \quad alors,$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left(\frac{x+5}{x-1}\right)' \ Proposition\ 4'$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{(x+5)'(x-1)-(x+5)(x-1)'}{(x-1)^2}\right] \ Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{1(x-1)-(x+5)(1)}{(x-1)^2}\right]$$

$$f'(x) = -csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\left[\frac{-6}{(x-1)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x-1)^2}csc^2\left(\frac{x+5}{x-1}\right)$$

g) $f(x) = \frac{\tan 5x}{3-\cot 3x}$ $alors$

$$f'(x) = \frac{(\tan 5x)\prime(3-\cot 3x)-(\tan 5x)(3-\cot 3x)\prime}{(3-\cot 3x)^2} \quad \textit{dérivée d'un quotient}$$

$$f'(x) = \frac{(\sec^2(5x)(5x)'(3-\cot 3x)-(\tan 5x)(-[-csc^2 3x])(3x)'}{(3-\cot 3x)^2} \ \textit{Propositions } 3' et\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{(\sec^2(5x)(5)(3-\cot 3x)-(\tan 5x)\ csc^2(3x)\ (3)}{(3-\cot 3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5sec^2 5x[3-\cot 3x]-3\tan 5x\ csc^2 3x}{(3-\cot 3x)^2}$$

Exercice 15.1

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx \quad alors,$

$$f'(x) = (sinx-5)'(\operatorname{arccot} x) + (\sin x - 5)(\operatorname{arccot} x)' \quad \textit{Dérivée d'un produit}$$

$$f'(x) = \cos x\,(\operatorname{arccot} x) + (\sin x - 5)\frac{-1}{1+x^2} \quad \textit{Proposition } 1\ (\textit{chap.} 14)\ et\ 4$$

$$f'(x) = \cos x\,(\operatorname{arccot} x) - \frac{(\sin x - 5)}{1+x^2}$$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc\tan x) \quad alors,$

$$f'(x) = (\arccos x)'(\arctan x) + (\arccos x)(\arctan x)' \quad \textit{Dérivée d'un produit}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}(\arctan x) + (\arccos x)\ \frac{1}{1+x^2} \quad \textit{Propositions } 2\ et\ 3$$

$$f'(x) = \frac{-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{1+x^2}$$

c) $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{arc\cot 2x}$ $\quad alors,$

$$f'(x) = \frac{\left(\arctan\sqrt{x}\right)' arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\,(arc\cot 2x)'}{(arc\cot 2x)^2} \quad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}\ arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\frac{-(2x)'}{1+(2x)^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2} \quad Propositions\ 3^{'} et\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{1+x}\ arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\frac{-2}{1+4x^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\ arc\cot 2x + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{arc\cot 2x}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

d) $f(x) = arc\sin(\tan x) - \arccos(cscx)$ $\quad alors,$

$$f'(x) = [\arcsin tanx]' - \ [\arccos(cscx)]'$$

$$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{-(-\csc x\cot x)}{\sqrt{1-csc^2x}} \quad Propositions\ 3\ Chap.14, 1'et\ propositions\ 6\ chap.14, 2'$$

$$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{\csc x\cot x}{\sqrt{1-csc^2x}}$$

e) $f(x) = \frac{arc\cos x^3}{arc\sin x^2}$ $\quad alors,$

$$f'(x) = \frac{(arc\cos x^3)'\,\text{arcsin}\,x^2 - \text{arccos}\,x^3(\ arc\sin x^2)'}{(arc\sin x^2)^2}\ \ Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-(3x^2)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,\text{arcsin}\,x^2 - \text{arccos}\,x^3\,\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}}{(arc\sin x^2)^2}\quad Proposition\ 2'et\ 1'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-3x^2\,\text{arcsin}\,x^2}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{2x\,\text{arccos}\,x^3}{\sqrt{1-x^4}}}{(arc\sin x^2)^2}$$

f) $f(x) = \ln\,(arc\tan e^x)\quad alors,$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x}\,(arc\tan e^x)'\quad Dérivée\ de\ \ln\ \ et\ dérivation\ en\ chaîne$$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x}\,\frac{e^x}{1+e^{2x}}\ \ Dérivée\ de\ e^x\ Proposition\ 3'$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(arc\tan e^x)(1+e^{2x})}$$

g) $f(x) = \ 2x^3 - \sin x\,\text{arccot}\,5x\quad alors,$

$$f'(x) = (2x^3)' - (\sin x\,\text{arccot}\,5x)'$$

$$f'(x) = 6x^2 - (\sin x)'\,\text{arccot}\,5x + sinx\,(\text{arccot}\,5x)'\quad Dérivée\ d'un\ produit$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x\,\text{arccot}\,5x + \sin x\ \frac{-5}{1+25x^2}$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x\,\text{arccot}\,5x - \frac{5\sin x}{1+25x^2}$$