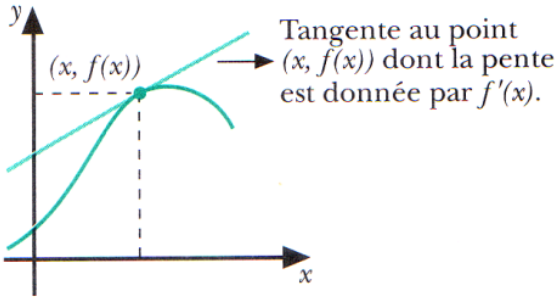
Chapitre 7 : La dérivée (point de vue général)

Définition : On appelle la ***dérivée*** d'une fonction le taux de variation instantanée TVI (qui correspond à la vitesse instantanée d'un mobile).

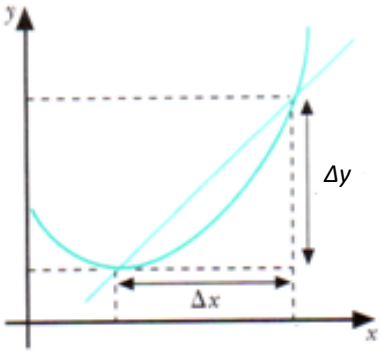
Graphiquement la **dérivée**, notée $f'(x)$, correspond à la pente de la tangente à la courbe de f au point $(x, f(x))$.



Décortiquons le concept de dérivée un peu plus…

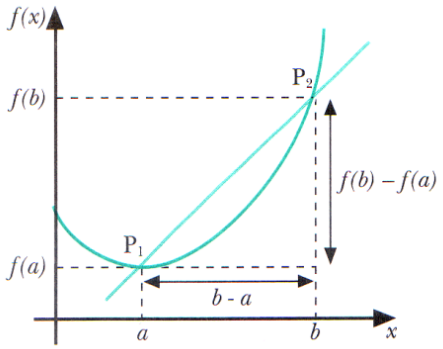
Comme la dérivée est un taux de variation, plus précisément un taux de variation d'une tangente en un point d'une courbe, la dérivée est désignée par un remaniement de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Commençons, afin de trouver la formule de la dérivée, en revoyant ensemble le taux de variation moyen (TVM) tel que vu lors du chapitre 3.



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Taux\ de\ Variation\ Moyen$ d'une sécante (TVM)

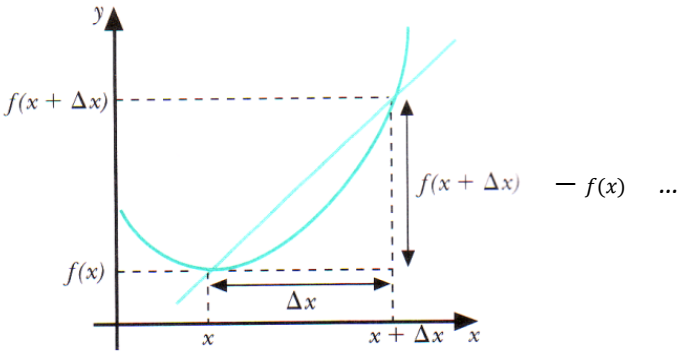
En changeant le symbolisme lié au point P_1 et P_2

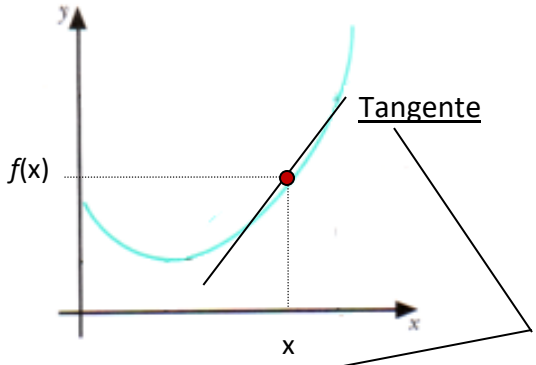


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = TVM_{[a,b]}$$

Cependant, nous désirons trouver le taux de variation d'une tangente (définition de dérivée) et non le taux de variation d'une sécante.

On remarque que, pour obtenir graphiquement une tangente; Δx ainsi que Δy ou *f*(x+Δx)-*f*(x) doivent tendre vers 0. Autrement dit, comme la tangente ne touche la courbe qu'en un seul point, il n'y a pas de Δx et de Δy !!!





$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *de la tangente* = *Taux de Variation Instantanée*(TVI)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} de\ la\ tangente = \mathbf{TVI} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}} \quad où\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cette formule est ce qu'on appelle la **dérivée**! La dérivée de la fonction *f*(x) est notée ***f '*(x)**

$$\boldsymbol{f'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

***f '*(x) = dérivée de *f* (x) = pente de la tangente en un point de *f* (x)**

Exemple 7.1

Calculons la dérivée de *f* si *f*(x) = x^2

$$f\,'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad par\ définition$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \qquad car\ f(x) = x^2$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \qquad développement$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad mise\ en\ évidence\ simple\ de\ \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) \qquad en\ simplifiant\ car\ \Delta x \neq 0$$

= 2x en évaluant la limite

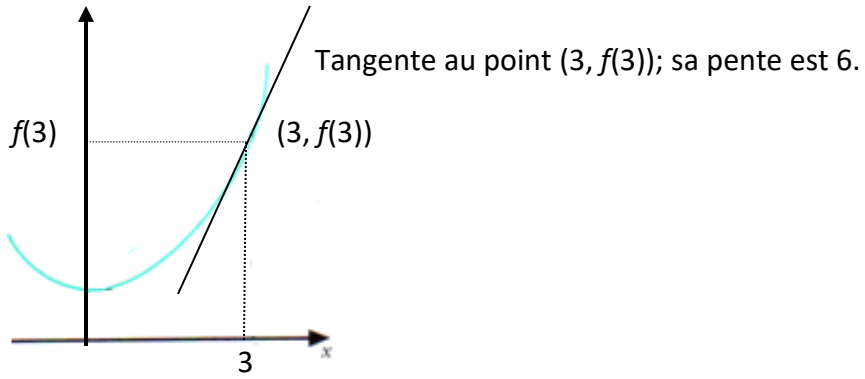
On remarque donc que si *f*(x) = x^2 alors la dérivée *f '*(x) = 2x

Si nous voulons évaluer la dérivée afin de calculer la pente de la tangente à un point spécifique, il suffit d'évaluer la dérivée à la valeur du x du point désiré.

Par exemple, si nous voulons trouver la dérivée (pente de la tangente) lorsque x = 3, il suffit d'évaluer: *f '*(3).

f '(3) = 2(3) = 6, ce qui signifie que la pente de la tangente à la courbe (*f*(x) = x^2) à x = 3 est de 6 !

Graphiquement :



Exercices 7.1

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 8$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$

b) Évaluer la dérivée $f'(5)$

Exercices 7.2

Soit $f(x) = 3x+1$

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$

b) Évaluer la dérivée $f'(2)$

Je suis d'avis, tout comme vous je suis certain, que cette façon de trouver la dérivée d'une fonction est loin d'être simple. Vous trouverez, dans le chapitre 8 de ce fascicule des manières (6 propositions) beaucoup plus simples de trouver la dérivée d'une fonction.

Réponses :

Exercices 7.1

$\boldsymbol{a}$) $f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *par définition*

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 8 - \left(\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 8\right)}{\Delta x}$ *car* $f(x) = x^2 - 4\mathrm{x} + 8$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}\Delta x + \Delta x^2 - 4\mathrm{x} - 4\Delta\mathrm{x} + 8 - x^2 + 4x - 8}{\Delta x}$ *en développant*

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\mathrm{x}\Delta x + \Delta x^2 - 4\Delta\mathrm{x}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\mathrm{x}(2\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x} - 4)}{\Delta x}$ mise en évidence simple du Δx

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x} - 4$ en simplifiant car $\Delta\mathrm{x} \neq 0$

= 2x – 4 en évaluant la limite

b) $f\,'(5) = 2(5) - 4 = 6$

Exercices 7.2 :

$\boldsymbol{a}$) $f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *par définition*

$f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3(x+\Delta x) + 1 - (3x+1)}{\Delta x}$ *car* $f(x) = 3x + 1$

$f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x + 3\Delta x + 1 - 3x - 1}{\Delta x}$ *en développant*

$f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3\Delta x}{\Delta x}$

$f\,'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3$ en simplifiant car $\Delta\mathrm{x} \neq 0$

f '(x) = 3 en évaluant la limite

b) f'(2) = 3