Chapitre 10 : Chapitre qui tue : Dérivée d'équations implicites

Je me devais de vous montrer comment dériver des équations implicites. Cependant, je vous avertis, ce chapitre est complexe. C'est pour cette raison que cette notion est dans les derniers chapitres, car je ne voulais pas vous achever trop vite… Mais au moins, vous pourrez vous vanter d'avoir vu les dérivées des équations implicites avant votre cours de Calcul 1.

Remarque : Il y aura beaucoup de références au **chapitre 8**.

En général, vous avez toujours analysé des fonctions ou le *y* était isolé.

Ex. $y = 2x + 4$ ou $y = 2\sqrt{x-4} + 1$ ou $y = \frac{3x+1}{x^2-9}$

Par contre, il y a certaines fonctions où les variables x et y sont liées par une relation implicite, c'est-à-dire que le y ne s'isole pas.

Ex. $x^3y + xy^2 = 5$ ou $3x^4y^5 + 4y^2 = 7x^2y^3 - 9$

Ces équations sont appelées *équations implicites.*

Le but de ce chapitre est de trouver la dér*ivée* de certaines équations implicites, que nous notions dans les chapitres précédents ***f ´(x)***, pour faciliter le langage mathématique nous écrirons à la place ***y´***.

Avant de dériver des équations implicites, voici un préalable crucial, c'est-à-dire une 7ème proposition importante qui sera généralisée l'an prochain en calcul 1 par ce qu'on appellera la ***règle de dérivation en chaîne*** permettant de trouver la dérivée des fonctions dites **composées**.

Proposition 7 : Si *H*(x) = $[f(x)]^r$, alors *H'*(x) = r$[f(x)]^{r-1}f'(x)$ où r ∈ $\mathbb{R}$

Par exemple, calculons la dérivée de *H(x)* = $(8x^4 - 2x)^4$

Selon la proposition 7 : *H'(x)* = $4(8x^4 - 2x)^3(32x^3 - 2)$, ce qui est relativement facile à comprendre.

Voici un autre exemple : calculons la dérivée de *H(x)* = $(x^3 + x^2 - 6x)^5$

H'(x) = $5(x^3 + x^2 - 6x)^4(3x^2 + 2x - 6)$

Avant d'effectuer la dérivée d'équation implicite, il y a un autre préalable important **la notation de Leibniz**.

$\frac{dy}{dx}$ $signifie\ dériver\ y\ \left(la\ fonction\ f(x)\right)\ par\ rapport$ à x.

$\frac{dy}{du}$ $signifie\ dériver\ y\ \left(la\ fonction\ f(x)\right)\ par\ rapport$ à u.

$\frac{du}{dx}$ $signifie\ dériver\ u\ (la\ fonction\ ''u'')\ par\ rapport$ à x.

Ces notations désignent la fonction à utiliser et la dériver par rapport à une variable en particulier.

Notation de Leibniz : *f '(x) = y' =* $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}}$

Reprenons l'exemple précédent et calculons la dérivée appelée f '(x) ou y' ou $\frac{dy}{dx}$

de *y* = $(8x^4 - 2x)^4$, grâce à la notation de Leibniz.

D'abord affirmons que y = $u^4\ et\ u = \ 8x^4 - 2x$

Calculons : $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \ \frac{du}{dx}$

$= 4u^3\ (32x^3 - 2)$ car $\frac{dy}{du} = 4u^3 est\ la\ dérivée\ de\ y\ par\ rapport$ à $u\ et$

$\frac{du}{dx} = 32x^3 - 2\ est\ la\ dérivée\ de\ u\ par\ rapport$ à x

$= 4(8x^4 - 2x)^3(32x^3 - 2)$ car $u = \ 8x^4 - 2x$

Nous allons maintenant utiliser le principe de la notation de Leibniz afin de trouver **la dérivée d'équations implicites.**

Dans l'exemple suivant, nous allons calculer la dérivée notée *y'* c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}$ (sans isoler *y*). Nous allons dériver chacun des deux membres de l'équation ce que nous appelons la dérivation implicite.

$$\boldsymbol{x^2 + y^3 - x^2y^5 = 8}$$

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^3 - x^2y^5) = \frac{d}{dx}(8)$ *en dérivant les 2 membres par rapport à x*

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x^2y^5) = \frac{d}{dx}(8)$ *proposition 4*

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) - \left[\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)(y^5) + (x^2)\left(\frac{d}{dx}(y^5)\right)\right] = \frac{d}{dx}(8)$ *proposition 5*

$2x + \frac{d}{dx}(y^3) - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\frac{d}{dx}(y^5)\right)\right] = 0$ *propositions 3 et 1*

Notez que les dérivées restantes ne s'exécutent pas **par rapport à x.** Nous devrons avoir recours pour ce faire à la notation de Leibniz.

$2x + \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx} - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\frac{dy^5}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$ *Notation de Leibniz*

$2x + \boldsymbol{3y^2}\frac{dy}{dx} - \left[(2x)(y^5) + (x^2)\left(\boldsymbol{5y^4}\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$ *dérivées y^3 et y^5 par rapport à y*

$2x + 3y^2\ y' - [(2x)(y^5) + (x^2)(5y^4\ y')] = 0$ *car* $\frac{dy}{dx} = y'$

$2x + 3y^2\ y' - (2x\ y^5 + x^2 5y^4 y') = 0$ *simplication des parenthèses*

Isolons maintenant y' qui est la dérivée recherchée.

$2x + 3y^2\ y' - 2x\ y^5 - 5x^2y^4y' = 0$

$3y^2\ y' - 5x^2y^4y' = -2x + 2x\ y^5$

$y'(3y^2 - 5x^2y^4) = -2x + 2x\ y^5$ *mise en évidence simple*

$y' = \frac{-2x+2x\ y^5}{3y^2-5x^2y^4}$ *voici, après une longue attente, la dérivée de* $x^2 + y^3 - x^2y^5 = 8$

Remarque : En général, dans les équations implicites où il s'agit d'évaluer y', nous avons à cause de la proposition 7 et la notation de Leibniz,

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(y^n) = \frac{d(y^n)}{dy}\ \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y'}$$

Dans les deux exemples suivants au lieu d'écrire $\frac{d}{dx}$ nous allons écrire l'équivalent *y'*.

<u>Exemple 10.1</u>

Calculons *y'* si $x^7y^3 = x^2$

$(x^7y^3)' = (x^2)' en\ dérivant\ les\ deux\ membres$

$(x^7)'\,y^3 + (x^7)(y^3)' = (x^2)'\ proposition\ 5$

$7x^6y^3 + x^7 3y^2y' = 2x\ proposition\ 3$

$x^7 3y^2y' = 2x - 7x^6y^3$

$$y' = \frac{2x - 7x^6y^3}{3x^7y^2}$$

<u>Exemple 10.2</u>

Calculons *y'* si $7x^5y^8 + 6y^3 - 5x^4 = 3x^2y^3 - 2x^8y^5$

$(7x^5y^8 + 6y^3 - 5x^4)' = (3x^2y^3 - 2x^8y^5)'$ $\quad en\ dérivant\ les\ deux\ membres.$

$(7x^5y^8)' + (6y^3)' - (5x^4)' = (3x^2y^3)' - (2x^8y^5)'$ $\quad proposition\ 4$

$35x^4y^8 + 56x^5y^7y' + 18y^2y' - 20x^3 = 6xy^3 + 9x^2y^2y' - 16x^7y^5 - 10x^8y^4y'$

$propositions\ 3\ et\ 5$

Isolons maintenant le *y'*

$56x^5y^7y' + 18y^2y' - 9x^2y^2y' + 10x^8y^4y' = -35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5$

$y'(56x^5y^7 + 18y^2 - 9x^2y^2 + 10x^8y^4) = -35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5$

$$y' = \frac{-35x^4y^8 + 20x^3 + 6xy^3 - 16x^7y^5}{56x^5y^7 + 18y^2 - 9x^2y^2 + 10x^8y^4}$$

Exercice 10.1

Calculer la dérivée *y'* de cette équation implicite.

$x^2 + y^2 = 16\ soit\ l'équation\ d'un\ cercle\ de\ rayon\ 4$

Exercice 10.2

Calculer la dérivée *y'* pour l'équation suivante :

$5x^3 + 2xy^4 = 3x^2y^3$

Réponses

Exercice 10.1

Nous désirons trouver la dérivée de l'équation implicite du cercle : $x^2 + y^2 = 16$

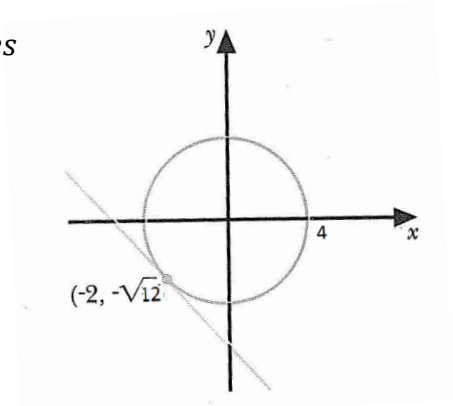
$(x^2 + y^2)' = (16)' Dérivées\ des\ deux\ membres$

$(x^2)' + (y^2)' = (16)'\ Proposition\ 4$

$2x + 2yy' = 0$ Proposition 3 et 1

$2yy' = -2x$

$y' = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$



Je tiens à vous rappeler que la dérivée $\boldsymbol{y'}$ représente la pente de la tangente

en un point du cercle. Par exemple, pour évaluer la pente de la tangente au point (-2, $-\sqrt{12}$) du cercle, il suffit de remplacer, dans l'expression de ***y'***, x par -2 et y par $-\sqrt{12}$. Ainsi,

Pente de la tangente au point (-2, $-\sqrt{12}$) = $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(-2,\ -\sqrt{12})}$ = $y'_{(-2,\ -\sqrt{12})} = \dfrac{-2}{\sqrt{12}}$

Exercice 10.2

Calculons la dérivée de $5x^3 + 2xy^4 = 3x^2y^3$

$(5x^3 + 2xy^4)' = (3x^2y^3)' dérivée\ des\ 2\ membres$

$(5x^3)' + (2xy^4)' = (3x^2y^3)'\ \ proposition\ 3$

$(5x^3)' + (2x)'y^4 + 2x(y^4)' = (3x^2)'y^3 \ + 3x^2(y^3)' \ \ proposition\ 5$

$15x^2 + 2y^4 + 2x4y^3y' = 6xy^3 + 3x^2 3y^2y' \ \ \ proposition\ 3$

$15x^2 + 2y^4 + 8xy^3y' = \ 6xy^3 + 9x^2y^2y'$

$8xy^3y' - 9x^2y^2y' = 6xy^3 - 15x^2 - 2y^4\ isole\ y'$

$y'(8xy^3 - 9x^2y^2) = 6xy^3 - 15x^2 - 2y^4$

$$y' = \frac{6xy^3 - 15x^2 - 2y^4}{8xy^3 - 9x^2y^2}$$