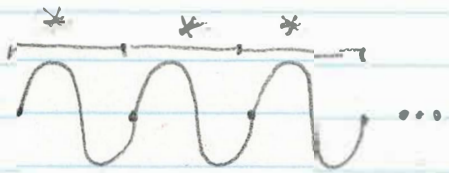
Notes de cours:
Chapitre 6 Fonctions trigonométriques

Voici le chapitre le plus important de l'année. Il est payant pour cette année et aussi crucial pour l'an prochain!

Les rapports sinus, cosinus et tangente sont utiles pour trouver des mesures de côtés et d'angles dans les Δ rectangles.

Par contre, cette année nous allons étudier les <u>fonctions</u> sinus, cosinus et tangente. Ces fonctions sont toutes <u>périodiques</u> on dit aussi cyclique. C'est-à-dire que leur graphique offre des sections qui se répètent

Ex ft. sinus :



Donc tous les phénomènes cycliques qui nous entourent peuvent suivre ce genre de fonctions.

Ex - Rotation de la lune autour de la Terre
- " " " Terre " " Soleil
- Les marées
- Les <u>ondes</u>; sismiques, sonores, cellulaires etc.
- Bref tous ce qui est cyclique

Voici les devoirs au fur et à mesure de vos lectures des pages suivantes. Vous devriez revenir de votre voyage à la section (8) Modèle cyclique. (Espagne)
(6) Pts TRIGONOMÉTRIQUES (PERON)

<u>Devoirs</u>

Sections (1) et (2) #1
Section (3) #2 + p91 #1acfh-2abdeh
Section (4) #3
Section (5) #4
Section (6) p91 #3 adfh-12 i)cd
Section (7) #5-7-8

} tous les corrigés sur monsieurbrandeau.com !

Hilroy

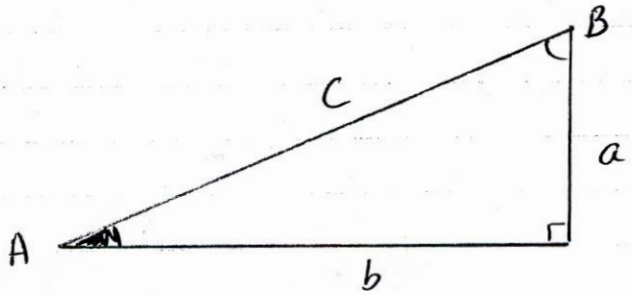
Chapitre 6 : Les FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES.

I) Explorons

1) Rapports trigonometriques

Écouter: Vidéo: Les 6 rapports trigonométriques

Il existe non pas 3, mais bien 6 rapports trigonométriques !
sin cos tan et cosecante (csc), sécante (sec) et cotangente (cot



$\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos A = \frac{b}{c}$ $\tan A = \frac{a}{b}$

$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}$ $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

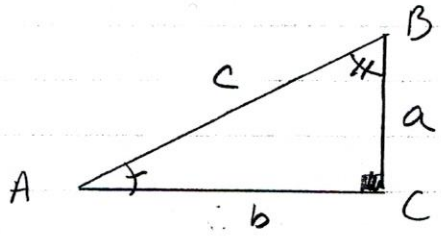
Prouvons que $\boxed{\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A}$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan A \ !$$

De même $\boxed{\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}}$

Écouter: Vidéo: Les angles complémentaires

2 Angles complémentaires (2 angles de somme 90°)



A et B sont complémentaires

$\sin A = \cos B$ car $\sin A = \frac{a}{c}$ $\cos B = \frac{a}{c}$ aussi !

ou

$\cos A = \sin B$ de la m̂ façon.

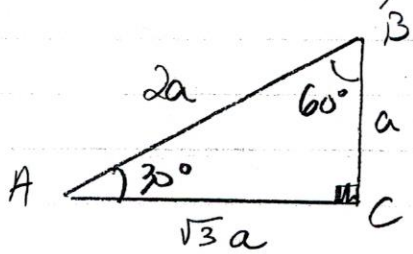
de manière générale $\boxed{\begin{array}{l} \sin\theta = \cos(90-\theta) \\ \cos\theta = \sin(90-\theta) \end{array}}$

Ceux qui ne me croient pas pitonner : $\sin 40° = \cos 50°$
ou $\sin 10° = \cos 80°$
etc.

Autrement dit <u>sinus d'un angle = cosinus de l'autre angle aigu</u>

Écouter: Vidéo : Sinus, cosinus et tangente de 30-45-60 degrés

* 3 Valeurs exactes de sin, cos ou tan des angles 30° - 45° - 60°



* Posons que $m\overline{BC} = "a"$

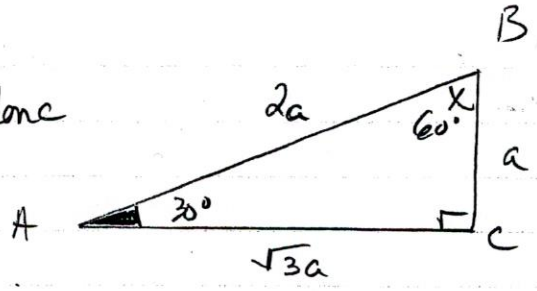
* $m\overline{AB} = 2a$ car le côté en face de l'angle de 30° dans un Δ rectang vaut la $\frac{1}{2}$ de l'hypoténuse.

** $m\overline{AC} = \sqrt{3}a$ par pythagore

$$\begin{cases} m\overline{AC}^2 + a^2 = (2a)^2 \\ m\overline{AC}^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \\ m\overline{AC} = \sqrt{3}a \end{cases}$$

30° – 60°

Reprenons donc

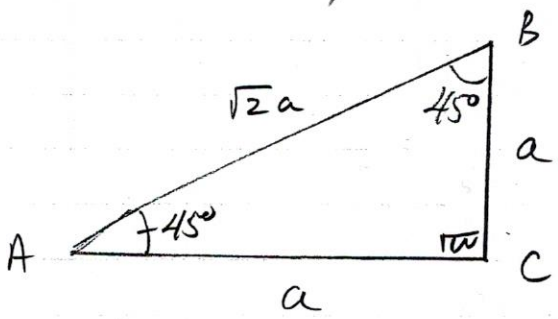


$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \longrightarrow \cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866... \longrightarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866...$

→ Piocher les, si vous ne me croyez pas ...

45°



* Δ isoangle ⇒ Δ isocèle
* $m\overline{AC} = m\overline{BC} = a$
* Trouvons $m\overline{AB}$ par pythagore

$m\overline{AB}^2 = a^2 + a^2$

$m\overline{AB}^2 = 2a^2$

$m\overline{AB} = \sqrt{2}\,a$

$\sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707...$

(RATIONALISATION) car $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ → qui est 1 en realeté !

$\cos 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707...$

$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1$

Résumons : $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866...$ et $\tan 45° = 1$

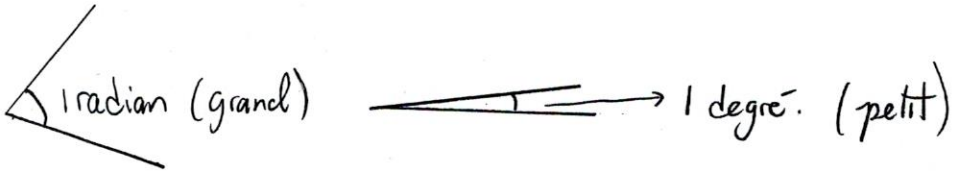
$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707...$

Écouter: Vidéo: Le RADIAN

4 Le Radian (SUPER IMPORTANTE) *

Premierement, le radian est une mesure d'angle au même titre que le degré.

On verra sous peu qu'un radian equivaut à beaucoup de degrés...



Voyons ensemble c'est quoi un radian!

Euler encore lui a inventé une mesure d'angle intimement liée au cercle, il a inventé le radian!

Maintenant notre but est de savoir :

1 radian ou 1 rad = combien de degrés?

et

360° = combien de radians (rad)

* Prenons la feuille photocopiée... *

Après avoir analysé cette feuille, résumons

le plus important

1 rad ≃ 57,3° { 360° = 2π rad { 180° = π rad

Maintenant trouvons l'équivalent à :

a) $\frac{\pi}{2}$ rad en degrés 2 moyens : règle de trois

π rad = 180°
$\frac{\pi}{2}$ rad = x

$\frac{180 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} = 90°$

OU : Si π rad = 180° ⇒ $\frac{\pi}{2}$ rad = $\frac{180°}{2}$ = 90°

Le radian

Définition de radian : Mesure d'un angle

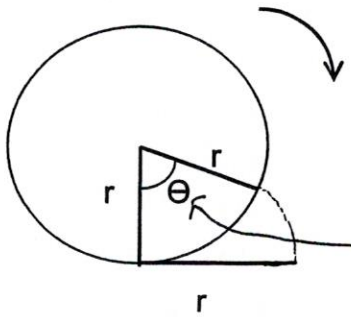
But : Savoir combien de degrés équivaut à 1 radian et 360° = ? de radians

	nb. de degrés	nb de circonférence
1 tour :	360°	1 donc $2\pi r$
½ tour :	180°	½ " πr
¼ tour :	90°	¼ " $\frac{\pi r}{2}$

Combien de fois le rayon est-il compris dans la circonférence? Autrement dit le raym entre combien de fois dans le tour d'un cercle?

$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ fois (Il y a 2π "raym" dans un cercle) → ≈ 6,28

De combien de degrés la roue doit-elle tourner pour franchir une distance égale au rayon de la roue.



$\theta = ?$

Angle		distance parcourue
θ	=	r
360°	=	$2\pi r$ (circonférence)

$\frac{360r}{2\pi r} = 57,3...°$ (ceci est 1 radian)

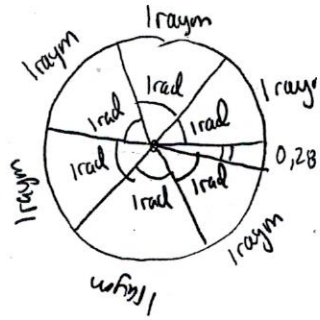
Donc si on tourne la roue d'une distance égale au raym on dit que la roue tourne d'un angle de 1 radian

Définition d'un radian : Angle au centre interceptant un arc égale au raym

*** → Un tour → 2π rad → 360 degrés
½ tour → π rad → 180 degrés
¼ tour → $\pi/2$ rad → 90 degrés
2 tours → 4π rad → 720 degrés

* Donc si 1 radian intercepte 1 raym d'arc et qu'il y a 2π raym dans un cercle il y a donc 2π radian dans un cercle !!

On peut établir une correspondance entre degrés, radians et tours de cercle. C'est ainsi que 90°, π/2 radian et 1/4 de tour nous amène à la même position sur le cercle. Complétez le tableau suivant de façon à retrouver ces équivalences.



Degrés	Radians	Tours
60°	60° = x rad, 180 = π rad; $\frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}t$
150° $\frac{5\pi}{6}$ rad = x°, π rad = 180°; $\frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 180}{\pi}$	5π/6	$\frac{150}{360} = \frac{5}{12}t$
$\frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$	$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$	3/4
450°	$\frac{5\pi}{2}$	5/4
3060°	17π	8,5t
1476	$\frac{41\pi}{5}$	4,1
2291,83°	40	6,37t

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad = ? de degrés <u>solution</u> $\left.\begin{array}{l}\frac{3\pi}{2}\text{ rad} = x^\circ \\ \pi\text{ rad} = 180^\circ\end{array}\right\}$ $\frac{\frac{3\pi}{2}\cdot 180}{\pi} = 270^\circ$

$\boxed{\text{ou}}$

$$\frac{3\pi}{2}\text{ rad} = \frac{3\cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$$

c) $\frac{\pi}{6}$ rad = ? de degrés <u>solution</u>: $\frac{\pi}{6}\text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

d) $\frac{\pi}{4}$ rad = ? " " <u>solution</u> $\frac{\pi}{4}\text{ rad} = \frac{180}{4} = 45^\circ$

e) Un tough! $\frac{168\pi}{3}$ rad = ? de degré <u>solution</u>: $\frac{168\cdot 180}{3} = 10\,080^0$

donc dès que vous voyez π rad $\Rightarrow$ c'est pareil à dire 180° !!!

Écouter: Vidéo: LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

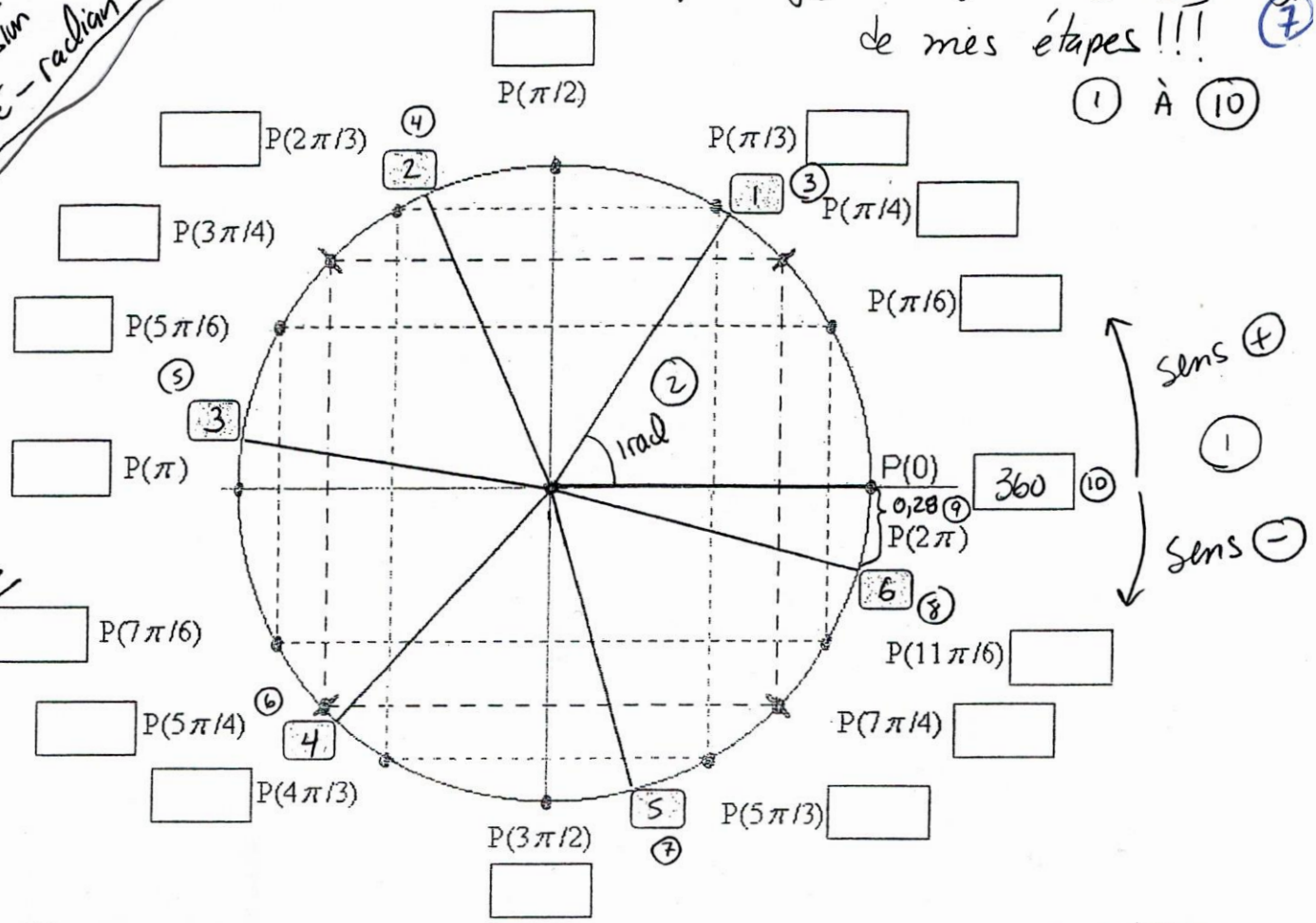
IMPORTANT

RADE

outil de reconversion d'angles degré - radian

✱ Soyez attentif : Suivez l'ordre de mes étapes !!! ✱ (7)

(1) À (10)

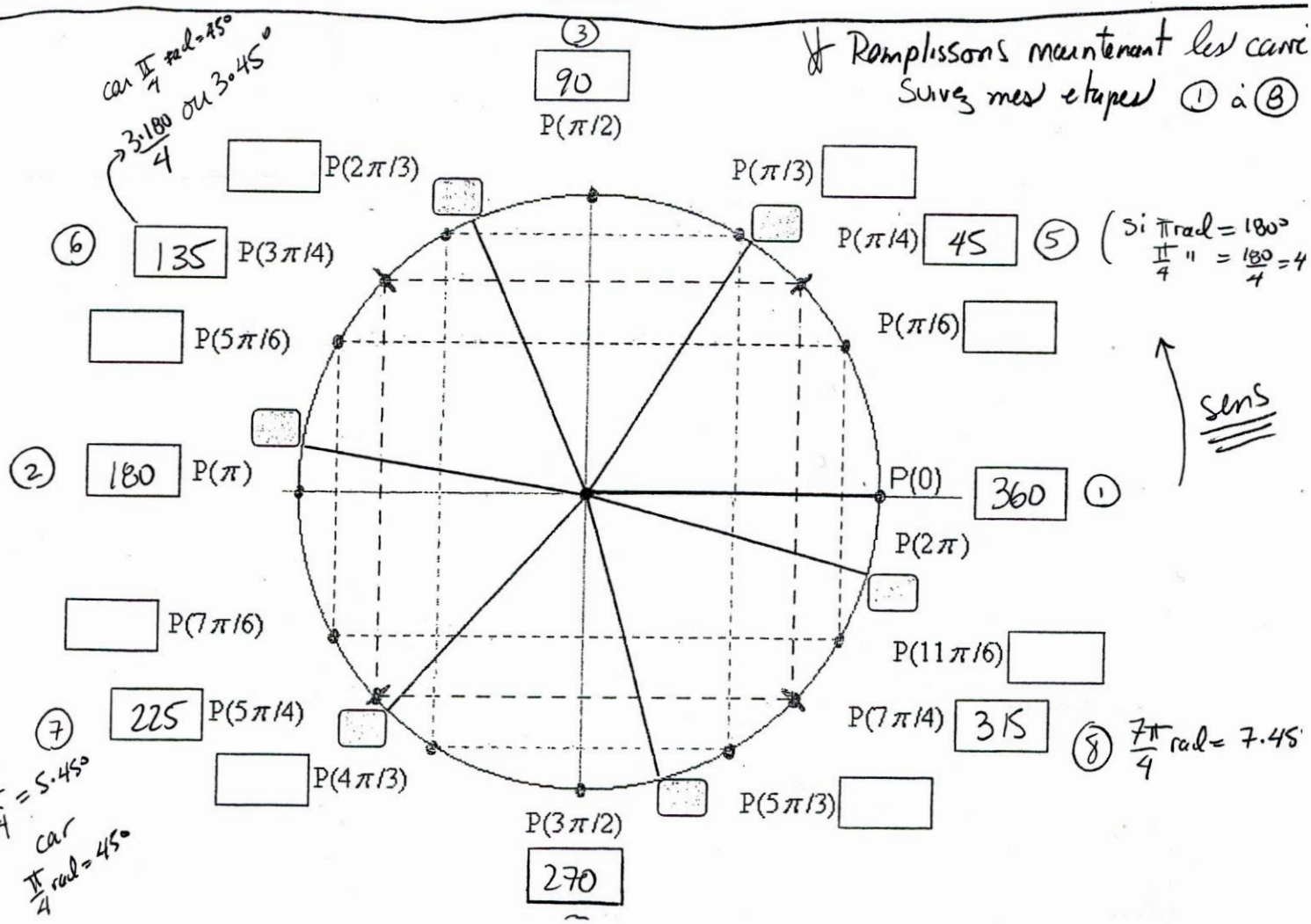


Bulles ombragées : entiers de radians

✱ Remplissons maintenant les carré
Suivez mes étapes (1) à (8)

car $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°

$\frac{3 \cdot 180}{4}$ ou 3 · 45°



(5) (si π rad = 180°, $\frac{\pi}{4}$ " = $\frac{180}{4}$ = 4

(8) $\frac{7\pi}{4}$ rad = 7 · 45

(7) $5\frac{\pi}{4}$ = 5 · 45° car $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°

Remplissons les autres carrés
Suivez mes étapes

8

car $\frac{2\pi}{3}$ rad $= 2 \cdot \frac{\pi}{3}$
$= 2 \cdot 60°$

P(π/2) [ ]

5 [120°] P(2π/3)

P(π/3) [60] 4 car $\frac{180}{3} = 60°$

P(π/4) [ ]

[ ] P(3π/4)

$\frac{5\pi}{6}$ rad $= 5 \cdot 30°$

P(π/6) [30] 3 car $\frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{180}{6}$

car π rad $= 180$

6 [150] P(5π/6)

2 [180] P(π)

P(0) [360°] 1

P(2π)

$7 \cdot 30°$

7 [210] P(7π/6)

$11\frac{\pi}{6} = 11 \cdot 30°$

P(11π/6) [330] 10

[ ] P(5π/4)

P(7π/4) [ ]

[240°] P(4π/3)

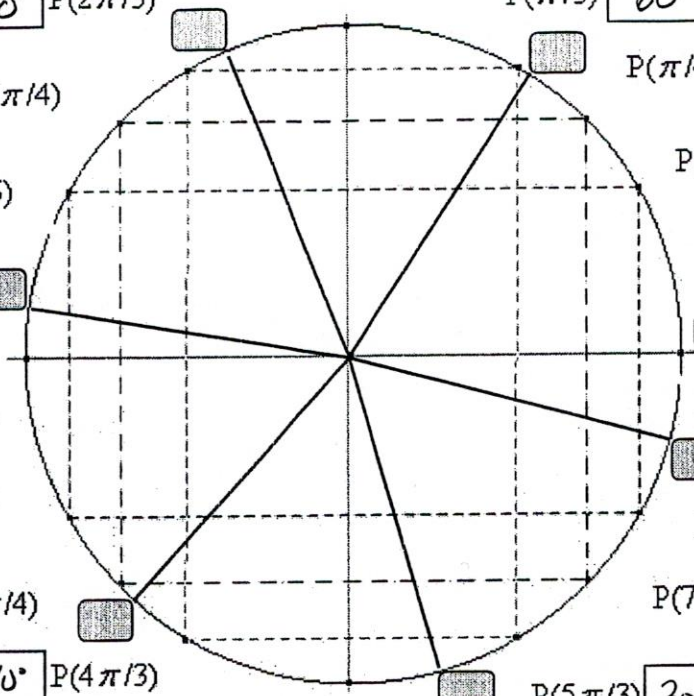
8

$4\frac{\pi}{3} = 4 \cdot 60°$

P(3π/2) [ ]

P(5π/3) [300] 9

$5\frac{\pi}{3} = 5 \cdot 60°$



Le plus important est de savoir que
$\frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$ || $\frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$
et $\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

Voici le tout complété

[90]
P(π/2)

[120] P(2π/3)

P(π/3) [60]

P(π/4) [45]

[135] P(3π/4)

P(π/6) [30]

[150] P(5π/6)

[180] P(π)

1 rad

P(0) [360]

P(2π)

[210] P(7π/6)

P(11π/6) [330]

P(7π/4) [315]

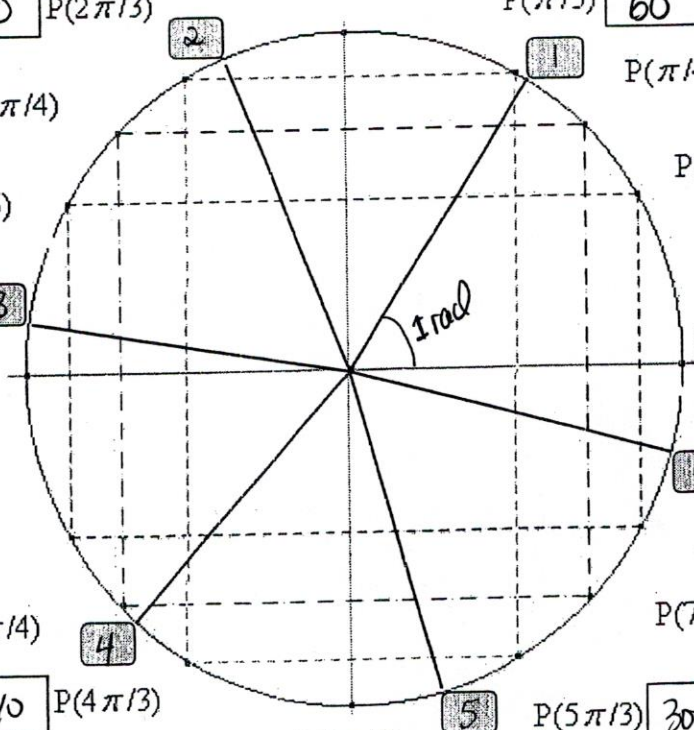
[225] P(5π/4)

[240] P(4π/3)

P(5π/3) [300]

P(3π/2)

[270]



Bon voici pourquoi les radians sont plus faciles à analyser que les degrés

Il est beaucoup plus facile de savoir que $\frac{3\pi}{4}$ radians c'est 3 fois $\frac{\pi}{4}$ radians que de savoir que 135° est 3 fois 45° !!!

De même que $\frac{7\pi}{6}$ radians equivaut à 7 fois $\frac{\pi}{6}$ radians plus simple que 210° equivaut à 7 fois 30° ...

Voici où je veux en venir...

Si vous savez que $\frac{\pi}{6}$ radians = 30°

$\frac{\pi}{4}$ radians = 45°

$\frac{\pi}{3}$ radians = 60°

vous savez tous les autres...

Ex $\frac{4\pi}{3}$ rad = $x°$ Solution $\frac{4\pi}{3} = 4 \times 60°$ car $\frac{\pi}{3}$ rad = 60°

$= 240°$

Ex $\frac{11\pi}{6}$ rad = $x°$ Solution $\frac{11\pi}{6} = 11 \times 30°$ car $\frac{\pi}{6}$ rad = 30°

$= 330°$

Ex $\frac{21\pi}{4}$ rad = $x°$ Solution $\frac{21\pi}{4} = 21 \times 45°$ car $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°

$= 945°$

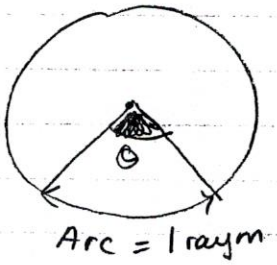
et ainsi de suite...

Section que je commenterai pas en capsule vidéo. Veuillez la prendre en note vous-mêmes, car je juge qu'elle est très simple à comprendre.

5 Trouvons des mesures d'arc dans le cercle

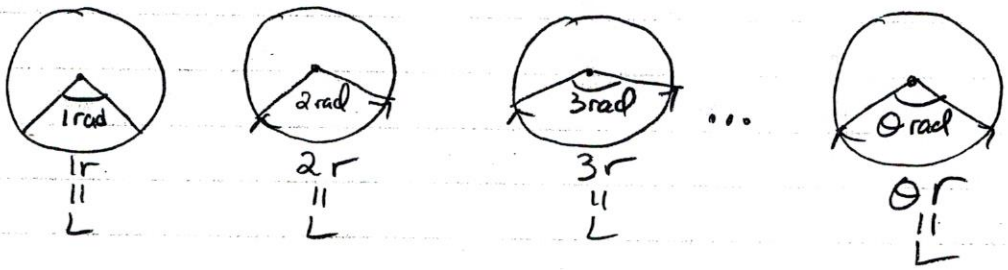
Je vais vous amener à comprendre la formule suivante, du moins je l'espère. $L = \theta r$

Retenez toujours que 1 radian est un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc dont la mesure équivaut au rayon du cercle comme ceci.



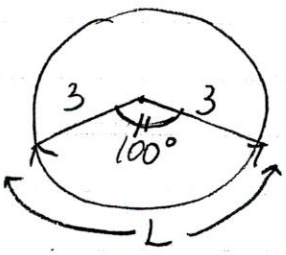
$\theta = 1 \text{ radian} \simeq 57{,}3°$

donc si :



donc $L = \theta r$ ou L = longueur de l'arc
θ = Angle en radian
r = rayon.

Ex 1



Trouver L si $r = 3\text{cm}$ et $\theta = 100°$

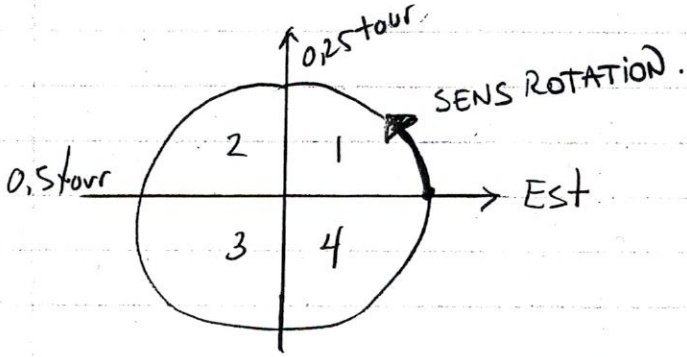
D'abord $\theta = ?$ en radians

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \pi \text{ rad} = 180° \\ x \text{ rad} = 100° \end{array}\right\} x = \frac{100\pi}{180} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad}$$

$L = \theta r$

$L = \frac{5\pi}{9} \cdot 3 = 5{,}24 \text{ cm}$

Ex2 Une bille tourne sur un plateau circulaire de 72 cm de diamètre. Elle parcourt une distance de 725 cm sur la circonférence du plateau. Dans quel quadrant s'arrêtera-t-elle si elle débute sa rotation à l'est.



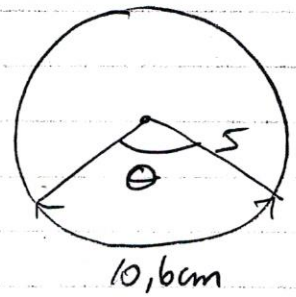
$l = 725\,cm$
$r = 36\,cm$
$\theta = ?$
$725 = \theta \cdot 36$
$\theta = 20,13$ RAD

Si 1 tour $= 2\pi$ rad
x tours $= 20,13$ rad

$\frac{20,13}{2\pi} = 3,20$ tours

3 tours revient sur ses pas 0,20 tour = <u>1er quadrant</u>

Ex3



Trouver "θ" mais en degrés

$l = 10,6$
$r = 5$
$\theta = ?$

$10,6 = \theta \cdot 5$
$2,12\,rad = \theta$

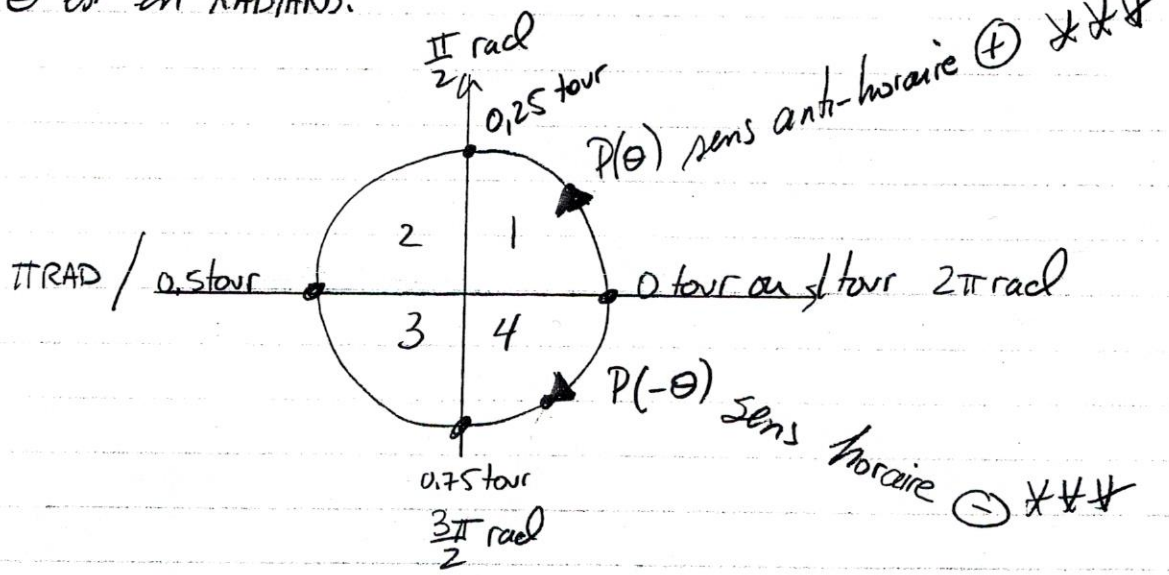
$\pi\,rad = 180°$
$2,12\,rad = x°$

$x = 121,47°$

Écouter : Vidéo: LES POINTS TRIGONOMÉTRIQUES

6 Les pts TRIGONOMETRIQUES.

Les pts trigos. sont en realité des pts sur le cercle du RADE (cercle trigonométrique) Il sont désignés par $P(\theta)$ où θ est en RADIANS.



Par exemple $P(\frac{\pi}{6})$ est dans le 1er quadrant car $\frac{\pi}{6}$ rad = 30°

But Trouver dans quel quadrant sont les pt. trigo. SUIVANTS

a) $P(3)$ rép : 2e car $\left.\begin{array}{l} 3\text{rad} = x\text{ tour} \\ 2\pi\text{rad} = 1\text{ tour} \end{array}\right\}$ $\frac{3}{2\pi} = 0{,}48$ tour ⇒ 2e

Il suffit de trouver le nb de tours equivalent au nb de radians du pt. trigo et le tour est joué !!!

b) $P(\frac{7\pi}{6})$ rép : 3e car $\left.\begin{array}{l} \frac{7\pi}{6}\text{ rad} = x\text{ tour} \\ 2\pi\text{ rad} = 1\text{ tour} \end{array}\right\}$ $\frac{\frac{7\pi}{6}}{2\pi} = \frac{7}{12} = 0{,}58$ tour

c) $P(40)$ rép 2e car $\left.\begin{array}{l} 40\text{ rad} = x\text{ tours} \\ 2\pi\text{ rad} = 1\text{ tour} \end{array}\right\}$ $\frac{40}{2\pi} = 6{,}36$ tours

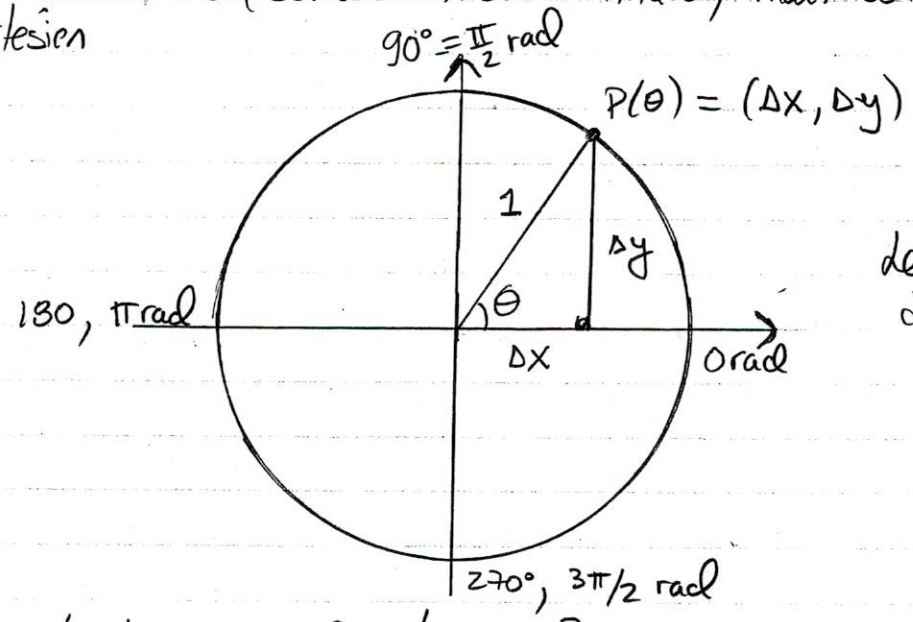
d) $P(-95)$ ⇒ 4e car $\left.\begin{array}{l} -95\text{ rad} = x\text{ tour} \\ 2\pi\text{ rad} = 1\text{ tour} \end{array}\right\}$ $\frac{-95}{2\pi} = -15{,}12$ tour

Écouter: Vidéo: LES COORDONNÉES DES POINTS TRIGONOMÉTRIQUES

7 Les coordonnées des pts trigonométriques $P(\theta)$

Avec cette section vous serez en mesure de savoir pourquoi $\sin 90° = 1$ $\cos 90° = 0$ ou que $\cos 0 = 1$, questions que tout élève intelligent comme vous se pose à tous les jours...

Voici votre RADE (CERCLE TRIGONOMETRIQUE) mais centré dans le plan cartésien



de RADE : CERCLE de rayon 1

Nous cherchons $\Delta x = ?$ et $\Delta y = ?$

$\cos\theta = \frac{\Delta x}{1} \Rightarrow \underline{\Delta x = \cos\theta}$ $\Big\}$ $\sin\theta = \frac{\Delta y}{1} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta y = \sin\theta}}$

Donc $P(\theta) = (\Delta x, \Delta y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

Retenez que $\left.\begin{array}{l}\Delta x = \text{largeur} = \cos\theta \\ \Delta y = \text{hauteur} = \sin\theta\end{array}\right\}$ ****

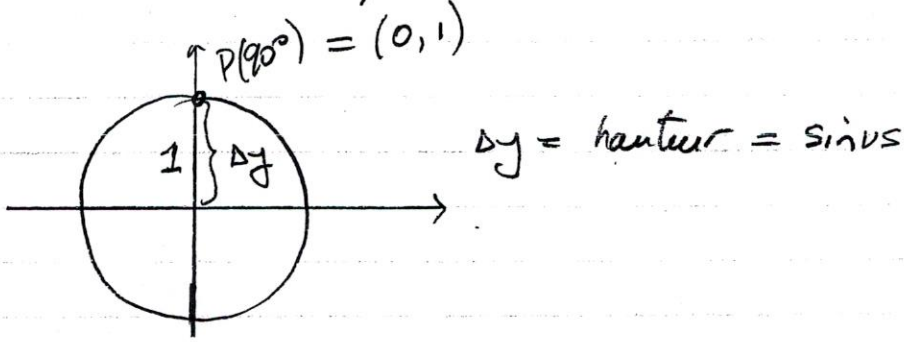
Remarque écoeurantes !
$\cos 0° = ?$ On cherche Δx ou largeur à $0°$, $\Delta x = 1$ car rayon $= 1$ donc $\cos 0° = 1$ pour cette raison !

$\cos 90° = ?$ On cherche Δx ou largeur à $90°$, $\Delta x = 0$ car aucun déplacement en Δx à $90°$ donc $\cos 90° = 0$ pour cette raison

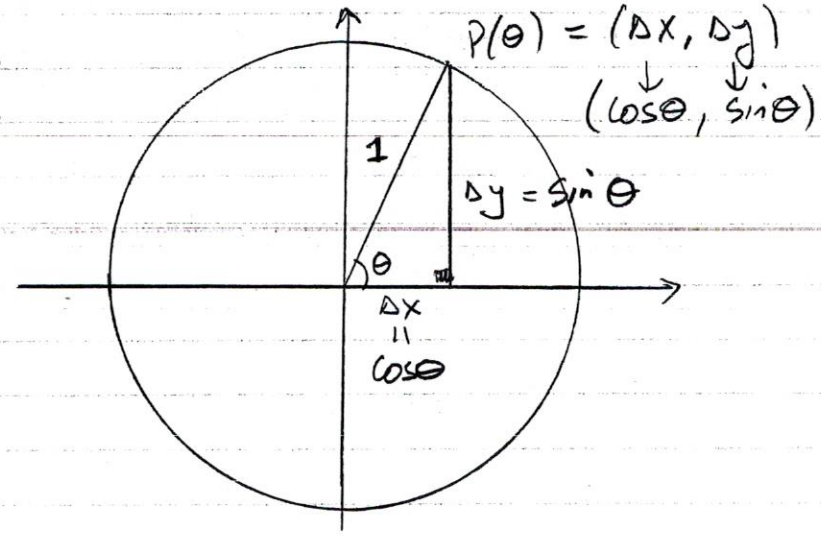
De même
$\sin 0° = ?$ On cherche Δy ou la hauteur à $0°$, $\Delta y = 0$ car il n'y a aucun déplacement en Δy à $0°$. Donc $\sin 0° = 0$ pour cette raison.

$\sin 90° = ?$ On cherche Δy ou la hauteur à $90°$, $\Delta y = 1$ car rayon $= 1$ donc $\sin 90° = 1$ pour cette raison

Pour les visuels



Récapitulons



Trouvons les coord. des pts trigos SUIVANTS.

a) $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\Delta x, \Delta y) = \left(\overset{0{,}866\ldots}{\cos\frac{\pi}{6}}, \overset{0{,}5}{\sin\frac{\pi}{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\Delta x, \Delta y) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$

* Il y a 3 valeurs à mémoriser

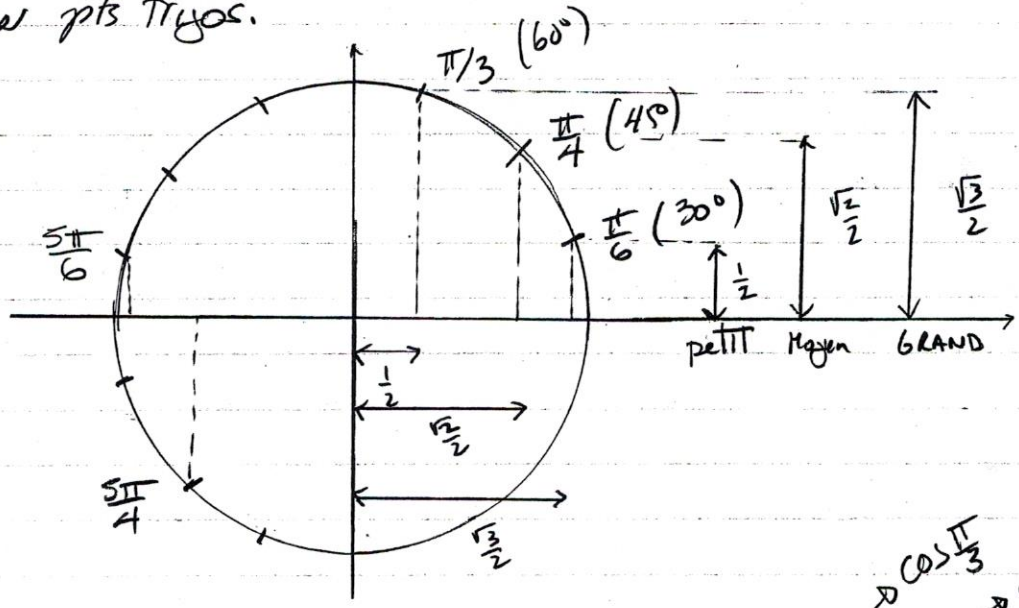
petit → $\frac{1}{2} = 0{,}5$

Moyen → $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots$

GRAND → $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots$

de plus en plus grandes...

* Il est donc simple de trouver les coordonnées des pts trigos du RADE en comparant ces 3 valeurs qui seront vos Δx ou vos Δy des pts trigos.



d) Trouvons les coord. de $P(\frac{\pi}{3}) = (\Delta x, \Delta y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Δx → petit, Δy → grand

$\frac{1}{2} \to \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \to \sin\frac{\pi}{3}$

e) $P(\frac{5\pi}{6}) = (-\text{grand}, +\text{petit}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

f) $P(\frac{5\pi}{4}) = (-\text{Moyen}, -\text{Moyen}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

g) $P(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$ Evident car rayon = 1

Sur votre RADE

g) $P\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (\text{petit}, -\text{grand}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

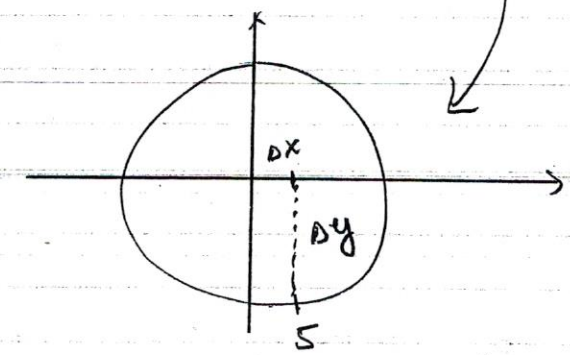
h) $P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-\text{petit}, \text{grand}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

i) $P\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ <u>oups</u> pas vu le RADE

Dans ce moment on fait $P\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \left(\cos\frac{8\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}\right) = (-0{,}9, -0{,}4$

j) $P(5) = (\cos 5, \sin 5) = (0{,}28, -0{,}95)$

Logique car 5 rad est là ...

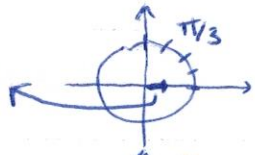


↳ Sur votre RADE.

Donc grâce au Rade on peut facilement déterminer des valeurs de sin-cos de certains angles.

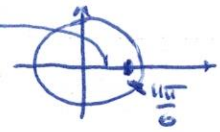
ex $\sin\frac{\pi}{2}$ = hauteur à $\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos\frac{\pi}{3}$ = largeur à $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (petit)

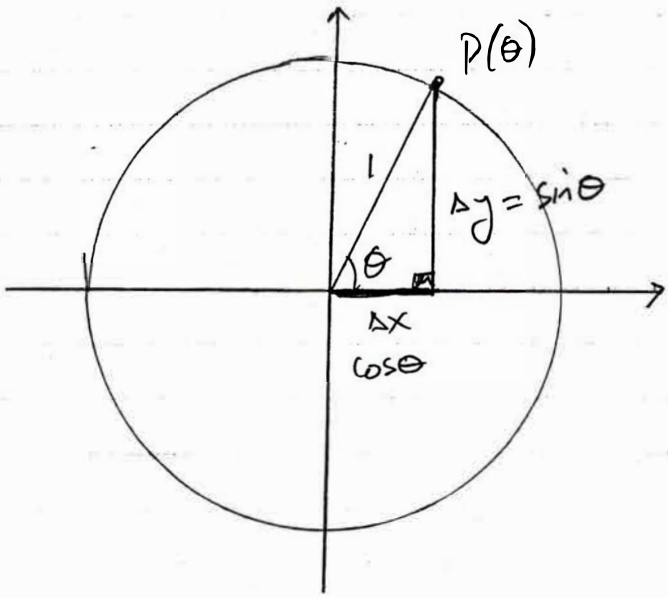


$\sin\frac{\pi}{4}$ = hauteur à $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (moyen)

$\cos\frac{11\pi}{6}$ = largeur à $\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (grand)



Juste en terminant, vous faire remarquer quelque chose



On a vu à la section 1 que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, on le voit encore mieux ici dans le triangle rectangle

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \left(\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{pente du taym}\right)$$

Pour les athés des mathematiques "pitonner" $\tan 20° = \_\_\_\_$ idem

$\frac{\sin 20°}{\cos 20°} = \_\_\_\_$

Finalement par pythagore $\Delta x^2 + \Delta y^2 = 1^2$

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ pour tout "θ"

Ex $(\cos 20)^2 + (\sin 20)^2 = 1$ ceci est malade !!!