

Chapitre 2 : Fonction définie par parties

Définition : Une fonction définie par parties est une fonction dont la loi de correspondance diffère selon les valeurs de « x »

Exemple 2.1

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x + 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Évaluer

a) $f(0) = \emptyset$ car $x = 0$ ne correspond à aucune demande de restrictions.

b) $f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17$, car -4 correspond à la restriction attribuée à $x < 0$.

c) $f(2) = 4$, 2 correspond à la restriction attribuée à $0 < x \leq 2$.

d) $f(5) = 3(5) + 5 = 20$ car 5 correspond à la restriction attribuée à $x > 3$.

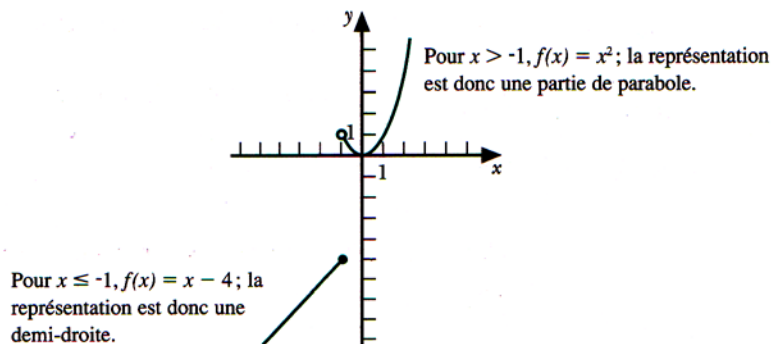
Définition : Le domaine d'une fonction définie par parties est la réunion des domaines de chaque sous fonction considérée uniquement sous son intervalle de définition.

Exemple 2.2

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Le domaine de cette fonction est tout simplement la réunion des deux restrictions $x \leq -1$ et $x > -1$ donc $\text{dom } f = -\infty, -1] \cup]-1, +\infty$

La représentation graphique de cette fonction définie par partie est :



Exemple 2.3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+5} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x+3}{x^2-5x+4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$ alors $f(x) = \frac{4}{x+5}$ son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

Si $x > 0$ alors $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = \frac{2x+3}{(x-1)(x-4)}$ son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1,4\}$

Donc le domaine « final » de la fonction définie par partie est la réunion de ces deux domaines $\mathbb{R} \setminus \{-5,0,1,4\}$ (0 aussi car selon les deux restrictions $x < 0$ et $x > 0$, la valeur de x ne peut pas être nulle)

Exercices 2.1

Soit :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculer :

a) $f(-1)$ b) $f(-3)$ c) $f(2)$ d) $f(3)$

Exercices 2.2

Déterminer le domaine des fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -4 < x < 5 \\ 4 & \text{si } x = 5 \\ 21x + 3 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x(x^2-1)} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{x-3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Réponses

Exercices 2.1

a) -2 b) 7 car $-2(-3)+1=7$ c) $\emptyset$ car aucune restriction inclut $x=2$ d) 0 car $3^2-9=0$

Exercices 2.2

a) $]-4,5] \cup [6, +\infty$

b) Si $x \leq 0$ alors $f(x) = \frac{-3}{x(x^2-1)} = \frac{-3}{x(x+1)(x-1)}$ donc $x \neq 0$, $x \neq -1$ et $x \neq 1$ ce dernier ne respectant pas la restriction $x \leq 0$ doit être exclu du domaine.

dom $f = -\infty, -1[\cup] -1, 0[$ si $x \leq 0$

Si $x > 0$ alors $f(x) = \sqrt{x-1}$ donc $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

dom $f = [1, +\infty$ si $x > 0$

La réponse finale est toujours la réunion des 2 domaines : $-\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup [1, +\infty$

c)

Si $x < 0$ alors $f(x) = 4x \Rightarrow \text{dom } f = -\infty, 0[$

Si $x \geq 0$ alors $f(x) = \frac{2}{x-3} \Rightarrow \text{dom } f = [0, 3[\cup] 3, +\infty$

La réponse finale est toujours la réunion des 2 domaines : $-\infty, 3[\cup] 3, +\infty$ ou $\mathbb{R} \setminus \{3\}$