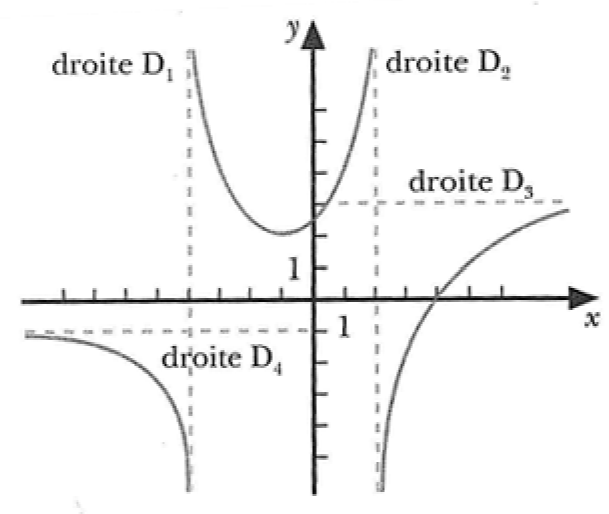
Chapitre 9: Identifier la position des asymptotes d'une fonction grâce aux limites.

1ère partie asymptote verticale



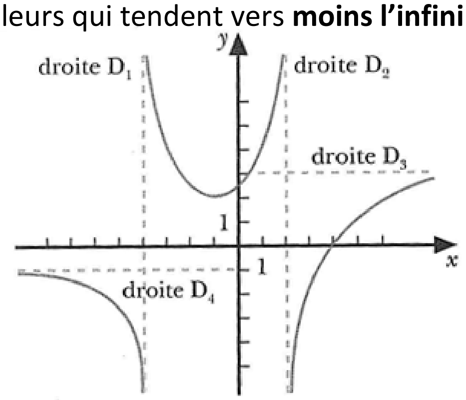
Asymptote verticale :

La fonction *f* est discontinue en x = -4 et x = 2 car il y a présence d'asymptotes verticales à ces endroits (D_1 et D_2).

En analysant bien le graphique, nous remarquons que lorsque les valeurs de x sont de plus en plus près de 2 par la **droite** (2^+), la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite asymptote D_2 et la fonction *f,* (les y), prend des valeurs qui tendent vers **moins l'infini**.

Nous notons ceci

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$



Par contre, nous remarquons aussi que lorsque les valeurs de x sont de plus en plus près de 2 par la **gauche** (2^-), la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite asymptote D_2 et la fonction *f,* (les y), prend des valeurs qui tendent vers **plus l'infini**.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

Par la même façon :

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty \ et \ \lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$$

Grâce à ces constatations nous disons que x = 2 et x = -4 sont des **asymptotes verticales** car les fonctions tendent toujours vers plus l'infini ou moins l'infini à ces deux endroits.

Donc pour qu'une fonction ait une asymptote verticale d'équation x = a, il faut **qu'au moins une** de ces 4 conditions soient respectées :

$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ \boldsymbol{ou} \ \mathbf{2.} \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \ \boldsymbol{ou} \ \mathbf{3.} \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \ \boldsymbol{ou}$$

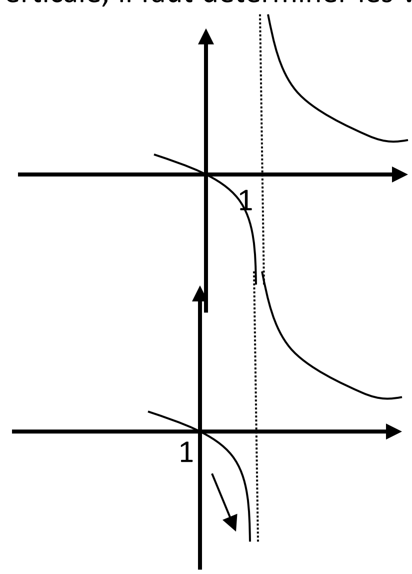
$$\mathbf{4.} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

<u>Exemple 9.1</u>

Pour savoir si une fonction possède une asymptote verticale, il faut déterminer les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

Soit la fonction *f(x)* = $\frac{3x+1}{x-1}$ où sont dom *f* = $\mathbb{R}$/ $\{1\}$

Analysons le comportement de *f* près de 1 (1^- et 1^+)



$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{0{,}99999 \ldots - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

donc lorsque la fonction f s'approche de 1 par la gauche, f prend des valeurs qui tendent vers $-\infty$.

Il y a donc asymptote verticale en x = 1 car une des 4 conditions est vérifiée. (Condition 4)

Nous pouvons aussi vérifier que :

$$\mathbf{1.} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = \frac{4}{1{,}00 \ldots 01 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Cela confirme aussi l'asymptote verticale en x = 1 car la condition 1 est vérifiée.

Cependant, il suffisait de vérifier **qu'une** de ces deux limites égales $-\infty$ ou $+\infty$, pour conclure la présence d'une asymptote verticale.

Exercice 9.1

Soit *f(x)* = $\frac{2x-6}{x^2-9}$

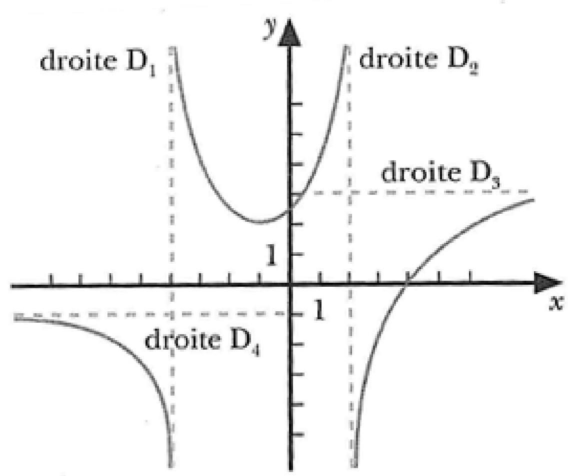
Identifier les asymptotes verticales.

Exercice 9.2

Évaluer la limite suivante afin de reconnaître l'existence ou non d'une asymptote verticale.

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$$

2ème partie asymptote horizontale



Reprenons la fonction *f* et analysons maintenant ce qui se produit aux asymptotes horizontales. Lorsque x → $-\infty$, la courbe de *f* s'approche de plus en plus de la droite D_4, dont l'équation est

y = -1 et la fonction *f* (les y) prend des valeurs de plus en plus près de -1.

Nous notons ceci :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$$

Nous voyons également que lorsque x $\rightarrow +\infty$, la courbe de f s'approche de plus en plus de la droite D_3, dont l'équation est

y = 3 et la fonction f (les y) prend des valeurs de plus en plus près de 3.

Nous notons ceci :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Grâce à ces constatations nous disons que y = -1 et y = 3 sont des **asymptotes horizontales** car les fonctions tendent toujours vers des valeurs de «y» précises. (-1 et 3 dans cet exemple)

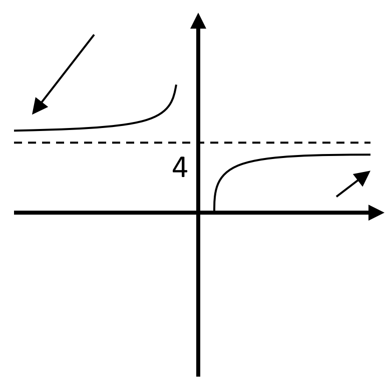
Donc pour qu'une fonction ait une asymptote horizontale d'équation y = b, il faut **qu'au moins une** de ces 2 conditions soient respectées :

$$\mathbf{1.}\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{b ou } \mathbf{2.}\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{b}$$

Exemple 9.2

Soit la fonction f(x) = 4 - $\frac{3}{x}$, déterminons la présence d'asymptote horizontale.

Analysons le comportement de f lorsque $x \rightarrow +\infty$ $\boldsymbol{et}$ $x \rightarrow -\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} 4 - \frac{3}{x} = \lim_{x \to +\infty} 4 - \frac{3}{9999999\ \dots} = 4 - 0 = 4$$

Donc, y = 4 est une asymptote horizontale lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} 4 - \frac{3}{x} = \lim_{x \to -\infty} 4 - \frac{3}{-9999999\ \dots} = 4 - 0 = 4$$

Donc, y = 4 est une asymptote horizontale lorsque $x \rightarrow -\infty$

Cependant, il suffisait de vérifier **qu'une** de ces deux limites égales 4 pour conclure la présence d'une asymptote horizontale.

Exemple 9.3

Soit la fonction *f(x)* = $\frac{x^5+7}{x^3+4x^2+5}$, déterminons si cette fonction possède des asymptotes horizontale.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+7}{x^3+4x^2+5} = \frac{+\infty}{+\infty} \; est\ une\ indétermination$$

Pour lever cette indétermination, il y a un truc :

- **Mettre en évidence la plus grande puissance de x** figurant au numérateur et faire de même avec le dénominateur.

- Simplifier la fonction et évaluer ensuite la limite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1+\frac{7}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{7}{x^5}\right)}{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)} = \frac{(+\infty)^2\left(1+\frac{7}{(+\infty)^5}\right)}{\left(1+\frac{4}{+\infty}+\frac{5}{(+\infty)^3}\right)}$$

$$= \frac{(+\infty)^2(1+0)}{(1+0+0)} = +\infty$$

Comme la limite lorsque $x \to +\infty$ n'égale pas un nombre réel, dans ce cas-ci, égalant$+\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale. Par contre, si la limite avait donnée 3, il y aurait eu une asymptote en y = 3.

Remarque : Dans votre cours de Calcul 1, vous serez aussi en mesure d'identifier les asymptotes obliques de la courbe d'une fonction.

Exercice 9.3

Déterminer si la fonction suivante possède une asymptote horizontale.

f(x) = $\frac{10x^2-1}{5x^2+6x+1}$

Exercice 9.4

Évaluer la limite suivante afin de reconnaître l'existence ou non d'une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16}$$

Réponses

Exercice 9.1

Évaluons la limite pour x = -3, car si x = -3 le dénominateur de la fonction est nul. Je peux vérifier pour -3$^-$ **ou** pour -3$^+$, si l'une ou l'autre donne +∞ ou -∞, la fonction possèdera une asymptote verticale en x = -3.

Vérifions pour -3$^+$.

$$\text{b)} \lim_{x\to -3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \quad \text{b)} \lim_{x\to -3^+} \frac{-12}{(-2.99999\ldots)^2-9} = \frac{-12}{-0{,}00000\ldots 1} = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

Il y a donc une asymptote verticale en x = -3.

Évaluons maintenant la limite pour x = 3, car si x = 3 le dénominateur de la fonction est aussi nul. Je peux vérifier pour 3$^-$ **ou** pour 3$^+$, si l'une ou l'autre donne +∞ ou -∞, la fonction possèdera une asymptote verticale en x = 3.

Vérifions pour 3$^+$

$$\text{b)} \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} \; donc\ indétermination$$

Nous devons donc lever cette indétermination en factorisant.

$$\text{b)} \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En calculant aussi

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{1}{3}$$

Donc, x = 3 n'est pas une asymptote verticale puisque le résultat de la limite n'est pas +∞ ou -∞.

Exercice 9.2

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \; est\ une\ indétermination\ de\ la\ forme\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \qquad \lim_{x\to -3^+} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \qquad \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{5}{2}$$

En calculant aussi

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \frac{5}{2}$$

Donc, x = 3 n’est pas une asymptote verticale puisque le résultat de la limite n’est pas +∞ ou -∞.

Exercice 9.3

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{10x^2-1}{5x^2+6x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(10-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(10-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(10-\frac{1}{(+\infty)^2}\right)}{\left(5+\frac{6}{+\infty}+\frac{1}{(+\infty)^2}\right)}$$

$$= \frac{(10-0)}{(5+0+0)} = 2$$

Donc, comme la limite égale un nombre réel, cette fonction possède une asymptote horizontale dont l’équation y = 2.

Exercice 9.4

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16} \quad \textit{est une indétermination}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^2-12x}{x^2+8x+16} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(-2-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(-2-\frac{12}{-\infty}\right)}{\left(1+\frac{8}{-\infty}+\frac{16}{(-\infty)^2}\right)} = \frac{-2}{1} = -2$$

Donc, comme la limite égale un nombre réel, cette fonction possède une asymptote horizontale dont l’équation y = -2.