Chapitre 8 : Dérivée de fonctions

Comme vous avez pu le voir il est assez complexe de trouver la dérivée d'une fonction en employant toujours : $f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Il existe une méthode beaucoup plus rapide, et surtout beaucoup plus simple de trouver la dérivée d'une fonction.

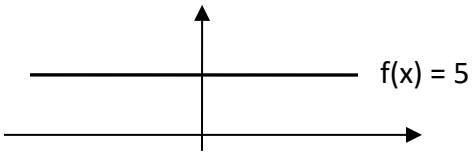
Il existe 15 propositions afin de trouver des dérivées de fonctions vraiment plus rapidement.
En voici 6 d'entre-elles qui les résument en grande partie.

Proposition 1 : Si $f(x) = K$, alors $f\,'(x) = 0$ (K étant un nombre réel)

<u>Exemple 8.1</u>

Si $f(x) = 5$, alors $f\,'(x) = 0$

Comme $f\,'(x) = 0$, cela signifie que le taux de variation est toujours nul. C'est évident, car la fonction $f(x) = 5$ est une variation nulle (Droite horizontale)



Proposition 2 : Si $f(x) = x$, alors $f\,'(x) = 1$

Cela se comprend, car la pente est toujours de 1 sur la droite $f(x) = \mathbf{1}x$

Proposition 3 : Si $f(x) = ax^n$, alors $f\,'(x) = nax^{n-1}$ où $n \in \mathbb{R}$

Cette proposition, est pour ma part, la plus utilisée et la plus importante de toute!

<u>Exemple 8.2</u>

a) Si $f(x) = 2x^3$, alors $f\,'(x) = 3(2)x^{3-1} = 6x^2$

b) Si $f(x) = 4x$, alors $f\,'(x) = 4x^{1-1} = 4x^0 = 4$

c) Si $f(x) = \sqrt{x}$,

$f(x) = \sqrt{x}$ => $f(x) = x^{1/2}$ alors $f\,'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercices 8.1

Trouver la dérivée de :

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = 4x^{3/2}$

c) $f(x) = 2x^7$

Somme et différence

Proposition 4 : Si $H(x) = f(x) + g(x)$, alors $H'(x) = f'(x) + g'(x)$

Par cette proposition, on effectue la dérivée de chaque polynôme de la fonction à dériver. Notez que cette proposition fonctionne aussi avec des soustractions de polynômes.

<u>Exemple 8.3</u>

Si $f(x) = 7x + 3$, alors $f'(x) = (7x)' + (3)'$ (Proposition 4)

$= (1)7x^{1-1} + 0$ (Proposition 3)

$= 7$

Produit

Proposition 5 : Si $H(x) = f(x)\, g(x)$, alors $H'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

<u>Exemple 8.4</u>

Si $f(x) = (x – 2)(2x + 8)$, alors

$f'(x) = (x – 2)'(2x + 8) + (x – 2)(2x + 8)'$ (proposition 5)

$= [(x)'- (2)'] (2x + 8) + (x – 2)[(2x)' + (8)'$ (proposition 4)

$= (1 – 0)(2x + 8) + (x – 2)(2 + 0)$

$= 2x + 8 + 2x – 4$

$= 4x + 4$

Exemple 8.5

Si $f(x) = 15(x^4 - 2x)$, alors

$f'(x) = (15)'(x^4 - 2x) + (15)(x^4 - 2x)'$ (proposition 5)

$= (0)(x^4 - 2x) + (15)[(x^4)' - (2x)']$ (proposition 4)

$= 0 + 15[4x^3 - 2]$

$= 60x^3 - 30$

Dans votre cours de Calcul 1 la proposition 5 pourra être généralisée par la proposition 5'

Proposition 5' : Si $H(x) = f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x)$, alors

$H'(x) = f'_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)\, f'_2(x)\, f_3(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)\, f_2(x)\, f'_3(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots f'_n(x)$

Division

Proposition 6 : Si $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ alors $H'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemple 8.6

Si $f(x) = \frac{x^5}{x^4}$ alors

$f'(x) = \frac{(x^5)'\, x^4 - x^5\, (x^4)'}{(x^4)^2}$ (proposition 6)

$= \frac{(5x^4)\, x^4 - x^5\, (4x^3)}{x^8}$ (proposition 3)

$= \frac{5x^8 - 4x^8}{x^8} = \frac{x^8}{x^8} = 1$

Ceci est pour vous prouver que la proposition 6 fonctionne belle et bien, car nous savions que la dérivée de $f(x) = \frac{x^5}{x^4}$ était de 1, car $f(x) = \frac{x^5}{x^4} = x$ et donc $(x)' = 1$ par la proposition 2, ou

si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$ par la proposition 3…

Exemple 8.7

Si $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ alors

$f'(x) = \frac{(2x)'(x+1) - 2x\,(x+1)'}{(x+1)^2}$ (proposition 6)

$= \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2}$ (propositions 3 et 4)

$= \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$

$= \frac{2}{(x+1)^2}$

Exercices 8.2

Effectuer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -9x$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = 4x^2 + 24x + 10$

d) $f(x) = 3x^{-1} + x^2$

e) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$

f) $f(x) = x^7 - 3x^5 - \frac{x^3}{3} + 1$

g) $f(x) = (2x + 1)(x + 1)$

h) $f(x) = \frac{-5}{x^5}$

i) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

j) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 + 7x + 4)$

Réponses

Exercices 8.1

a) Si $f(x) = 7$, alors $f'(x) = 0$ (proposition 1)

b) Si $f(x) = 4x^{3/2}$, alors $f'(x) = \frac{3}{2}(4)x^{\frac{3}{2}-1} = 6x^{1/2} = 6\sqrt{x}$ (Proposition 3)

c) Si $f(x) = 2x^7$, alors $f'(x) = 7(2)x^{7-1} = 14x^6$ (Proposition 3)

Exercices 8.2

a) Si $f(x) = -9x^1$, alors $f'(x) = (1)(-9)x^{1-1}$ proposition 3

$= -9x^0$

$= -9$

b) Si $f(x) = 3x^1 + 2$, alors $f'(x) = (3x)' + (2)'$ proposition 4

$= (1)(3)x^{1-1} + 0$ propositions 3 et 1

$= 3$

c) Si $f(x) = 4x^2 + 24x + 10$, alors $f'(x) = (4x^2)' + (24x)' + (10)'$ proposition 4

$= 8x + 24$

d) Si $f(x) = 3x^{-1} + x^2$, alors $f'(x) = (3x^{-1})' + (x^2)'$ proposition 4

$= -3x^{-2} + 2x$ proposition 3

$= \frac{-3}{x^2} + 2x$

e) Si $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$, alors $f'(x) = (x^4)' + \left(\frac{1}{x^4}\right)'$ proposition 4

$= 4x^3 + (x^{-4})'$ proposition 3 et j'ai seulement changé $\frac{1}{x^4}\ par\ x^{-4}$

$= 4x^3 + -4x^{-5}$ proposition 3

$= 4x^3 - \frac{4}{x^5}$

f) Si $f(x) = x^7 - 3x^5 - \frac{x^3}{3} + 1$, alors $f'(x) = (x^7)' - (3x^5)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (1)'$ proposition 4

$= 7x^6 - 15x^4 - \frac{3x^2}{3} + 0$ proposition 3

$= 7x^6 - 15x^4 - x^2$

g) Si $f(x) = (2x + 1)(x + 1)$, alors $f'(x) = (2x + 1)'(x + 1) + (2x + 1)(x + 1)'$ proposition 5

$= 2(x + 1) + (2x + 1)(1)$ propositions 3 et 1

$= 2x + 2 + 2x + 1 = 4x + 3$

h) Si $f(x) = \frac{-5}{x^5}$, alors $f'(x) = \frac{(-5)'(x^5) - (-5)(x^5)'}{(x^5)^2}$ proposition 6

$= \frac{0(x^5) - (-5)(5x^4)}{x^{10}}$ propositions 1 et 3

$= \frac{25x^4}{x^{10}} = \frac{25}{x^6}$

i) Si $f(x) = \frac{3}{x-1}$, alors $f'(x) = \frac{(3)'(x-1) - 3(x-1)'}{(x-1)^2}$ proposition 6

$= \frac{0\,(x-1) - 3(1)}{(x-1)^2}$ proposition 1 et 2

$= \frac{-3}{(x-1)^2}$

j) Si $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 + 7x + 4)$, alors $f'(x) = (\sqrt{x})'(2x^2 + 7x + 4) + \sqrt{x}\,(2x^2 + 7x + 4)'$ proposition 5

$= \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(2x^2 + 7x + 4) + \sqrt{x}\,[(2x^2)' + (7x)' + (4)']$ propositions 3 et 4

$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}(2x^2 + 7x + 4) + \sqrt{x}\,[4x + 7 + 0]$ proposition 3

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2 + 7x + 4) + \sqrt{x}\,(4x + 7)$