Chapitre 6 : Indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

Comme nous venons de le constater à plusieurs reprises, les propositions sur les limites nous révèlent que, pour évaluer une limite : $\lim_{x \to a} f(x)$, il semble suffisant de remplacer x par a dans la fonction f(x) donnée.

Par contre, il existe plusieurs cas où cette méthode n'est pas appropriée : par exemple lorsque dans le quotient, la limite du numérateur est égale à 0 et la limite du dénominateur est égale à 0. Nous appelons ce cas, une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

<u>Exemple 6.1</u>

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \ \textit{est une indétermination de la forme} \ \frac{0}{0}$$

Cependant nous pouvons lever cette indétermination en appliquant la limite lorsque x→ 4^-et lorsque x → 4^+

x	3,9	3,99	3,999	3,9999	… → 4^-
f(x)	7,9	7,99	7,999	7,9999	… → 8

x	4,1	4,01	4,001	4,0001	… → 4^+
f(x)	8,1	8,01	8,001	8,0001	… → 8

Nous pouvons remarquer que nous avons levé l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, car

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$$

Cependant voici un moyen beaucoup plus simple (que de faire des tableaux) : la factorisation du numérateur et dénominateur!

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} x + 4 = \mathbf{8}, \qquad si\ x - 4 \neq 0$$

Exercices 6.1

Évaluer :

a) $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 - 5x}{x - 1}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + x - 10}$

Il existe d'autres méthodes, autres que la factorisation, afin d'éliminer une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Ces autres méthodes sont des remaniements des expressions rationnelles (mettre sur le même dénominateur ou à l'aide du conjugué.)

Voici qu'est-ce qu'on entend par la notion de **conjugué** :

Le conjugué de A **+** B est : A **–** B

Le conjugué de A **–** B est : A **+** B

Par exemple, le conjugué de $\sqrt{x} - 5 \; est \; \sqrt{x} + 5$

À l'origine le conjugué servait à éliminer la radical d'une expression, par conséquent si on multiplie $\sqrt{x} - 5$ par son conjugué : $\sqrt{x} + 5$ nous obtenons :

$(\sqrt{x} - 5)\ x\ (\sqrt{x} + 5)$ = $x + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 25 = x - 25.$

Le conjugué servira, comme vous le verrez dans quelques instants, à évaluer une limite avec une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

Exemple 6.2

Évaluons :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} \; est \; une \; indétermination \; de \; la \; forme \; \frac{0}{0}$$

Pour lever cette indétermination il faut soustraire les expressions au numérateur en retrouvant leur même dénominateur :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3}\ \textit{dénominateur commun}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3x(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{3x(x-3)}\ \textit{mise en évidence simple de} -1\ \textit{au numérateur}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{3x}\ \textit{car}\ x-3\ \neq 0$$

$$=\frac{-1}{9}\ \textit{en évaluant la limite}$$

Exemple 6.3

Évaluons :

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}\ \text{x}\ \frac{3+\sqrt{\text{x}}}{3+\sqrt{\text{x}}}\ \text{en multipliant le numérateur et le dénominateur}$$

par le **conjugu**é du numérateur.

$$=\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \text{en effectuant}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-(x-9)}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \textit{mise en évidence simple de} -1\ \textit{au numérateur}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{\left(3+\sqrt{x}\right)}\ \textit{en simplifiant car}\ x-9\neq 0$$

$= \frac{-1}{3+\sqrt{9}} = \frac{-1}{6}$ *en évaluant la limite*

Exemple 6.4 qui tue…

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x^2 - 16}$$

On remarque que nous avons encore l'indétermination mathématique $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^2 - 16} \text{ mettre sur le même dénominateur}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ \frac{2+\sqrt{x}}{2+\ \sqrt{x}}}{x^2 - 16} \text{ utilisation du conjugué au numérateur}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\frac{4-x}{4\sqrt{x}+2x}}{x^2 - 16}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1(x-4)}{4\sqrt{x}+2x}}{(x-4)(x+4)}$$

$$\text{au numérateur: } -1 \text{ en mise en évidence simple, au dénominateur: différence de carrés}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{-1(x-4)}{(4\sqrt{x}+2x)(x-4)(x+4)} \text{ en effectuant}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{-1}{(4\sqrt{x}+2x)(x+4)} \text{ simplification car } x-4 \neq 0$$

$$\frac{-1}{(4\sqrt{4}+2(4))(4+4)} = \frac{-1}{128} \text{ en évaluant la limite}$$

Exercices 6.2

Évaluer :

$$\text{a)}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{1}{x}-1}$$

b) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - \dfrac{25}{x}}{x - 5}$

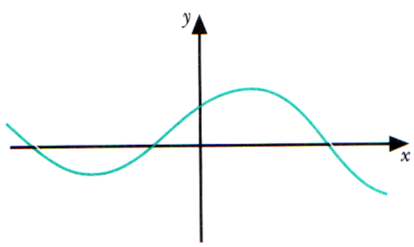
c) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{5}\right)}$

d) $\lim_{x \to 36} \dfrac{36 - x}{\sqrt{x} - 6}$

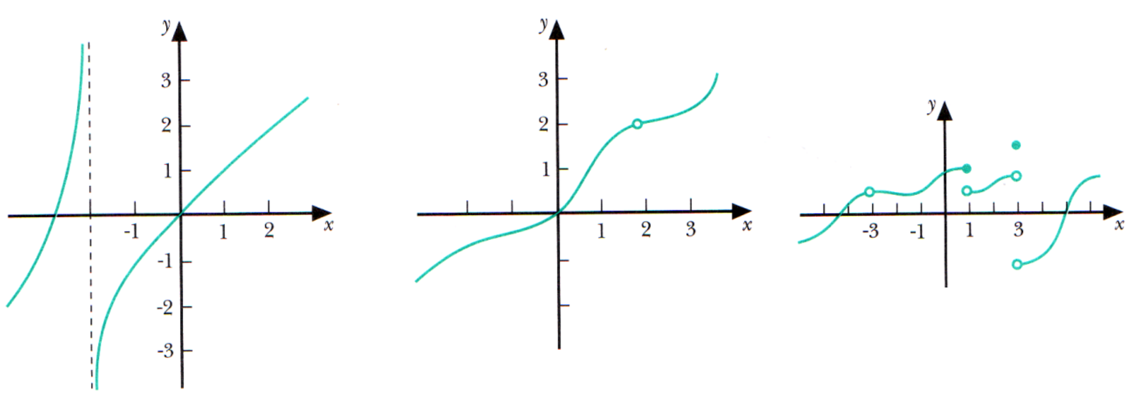
e) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

Notion : Continuité de fonction

Dans votre cours de calcul 1 vous terminerez ce chapitre en déterminant si une fonction est continue (courbe se traçant sans lever le crayon) ou discontinue sur un intervalle donné.



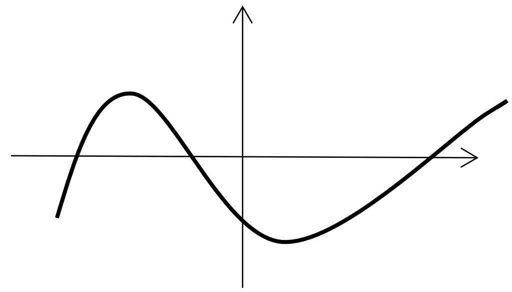
Fonction continue



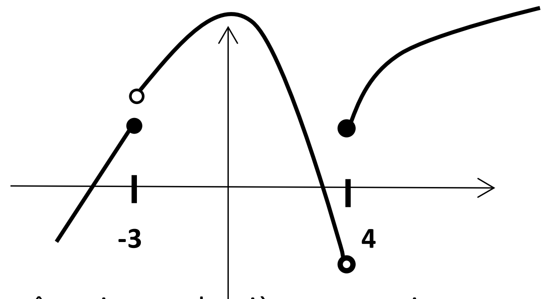
Fonctions discontinues

Définition : Une courbe est dite **continue** lorsqu'elle n'a pas de coupure, autrement dit, nous pouvons la tracer sans lever le crayon.

Le graphique ci-contre représente une fonction continue.



Le graphique ci-contre représente une fonction discontinue en x = -3 et x = 4



Faisons maintenant l'analyse de fonction pour connaître si cette dernière est continue ou discontinue.

Définition : Une fonction est **continue** en *x = a* si et seulement si ces conditions sont respectées :

$\mathbf{1})$ $f(a)$ est définie, c'est-à-dire *a* ∈ dom *f.* (En *x = a* : il n'y a pas une bulle vide ou une asymptote en *x = a*)

$\mathbf{2})\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe c'est − à − dire: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

$\mathbf{3})\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

c'est − à − dire la réponse de la condition 2 est la même que celle de la la condition 1.

Exemple 6.5

Soit *f(x)* = $\begin{cases} x+5 \ \boldsymbol{si}\ x < -1 \\ 4 \quad \boldsymbol{si}\ x = -1 \\ 4x^2 \ \boldsymbol{si}\ x > \ -1 \end{cases}$

Vérifions si *f(x)* est continue en *x = -1*

1ère condition: *f(-1)* = 4

2ème condition:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x + 5 = 4$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 4x^2 = 4$$

$$Donc, \lim_{x \to -1} f(x) = 4$$

3ème condition : $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

La fonction est donc continue!

Exemple 6.6

Soit *f(x)* = $\begin{cases} \frac{7x^2+1}{4x} \; si \; x < 1 \\ 3x^2 + 2 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$

Vérifions si *f(x)* est continue en *x = 1*

1ère condition: *f(1)* = 5

2ème condition:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{7x^2 + 1}{4x} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x^2 + 2 = 5$$

$$Donc, \lim_{x \to 1} f(x) \; n'existe \; pas.$$

La 2ème condition n'étant pas respectée la fonction est discontinue en x = 1

Exercice 6.3

Pour chaque fonction, déterminer si elle est continue aux valeurs de x données.

a) En *x = 4* pour *f(x)* = $\begin{cases} 5 \ si \ x < 4 \\ 6 \ si \ x = 4 \\ \frac{x^2-1}{x-1} \ si \ x > 4 \end{cases}$

b) En *x = 2* pour *f(x)* = $\begin{cases} 2x \ si \ x < 1 \\ 5 \ si \ x = 1 \\ x^2 + 1 \ si \ 1 < x < 2 \\ 5 \ si \ x = 2 \\ 7 - x \ si \ x > 2 \end{cases}$

Réponses

Exercices 6.1

a) $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 - 5x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{5x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 5x = 5 \ car \ x - 1 \neq 0$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{2} \ car \ x + 2 \neq 0$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(2x+5)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{2x+5} = \frac{-1}{9} \ car \ x - 2 \neq 0$

Exercices 6.2

a)$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\frac{1-x}{x}} \ dénominateur \ commun \ au \ dénominateur$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x^2-1)}{(1-x)}$ en effectuant

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x+1)(x-1)}{-(x-1)}$ carré parfait (numérateur)et mise en évidence simple de -1

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x+1)}{-1}$ simplifiant car $\text{x} - 1 \neq 0$

$= \frac{2}{-1} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - \frac{25}{x}}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\frac{x^2-25}{x}}{x-5}$ $\mathit{dénominateur\ commun}$

$= \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-25}{x(x-5)}$ en effectuant

$= \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)}$ carré parfait

$= \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x+5)}{x}$ simplifiant car $\text{x} - 5 \neq 0$

$= \frac{10}{5} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})} \text{x} \dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur

par le conjugué du dénominateur.

$= \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$ en effectuant

$= \lim\limits_{x \to 5} (\sqrt{x}+\sqrt{5})$ $\mathit{en\ simplifiant\ car}\ x - 5 \neq 0$

$= \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

d) $\lim\limits_{x \to 36} \dfrac{36-x}{\sqrt{x}-6} \text{x} \dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+6}$ *en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur*

$= \lim\limits_{x \to 36} \dfrac{(36-x)(\sqrt{x}+6)}{x-36}$ en effectuant

$$= \lim_{x\to 36} \frac{-(x-36)\left(\sqrt{x}+6\right)}{x-36} \ \ mise\ en\ \acute{e}vidence\ simple\ de -1\ au\ num\acute{e}rateur$$

$$= \lim_{x\to 36} -\left(\sqrt{x}+6\right)$$

= -$\left(\sqrt{36}+6\right)$ = -12

$$\textbf{e)} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2 - x^2)((x+h)^2 + x^2)}{h} \ \ diff\acute{e}rence\ de\ carr\acute{e}s$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)+x))((x+h)-x)(x^2+2xh+h^2+x^2)}{h} \ \ diff\acute{e}rence\ de\ carr\acute{e}s\ 1\grave{e}re\ parenth\grave{e}se\ et$$

$$d\acute{e}veloppement\ 2\grave{e}me\ parenth\grave{e}se$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+h)(h)(2x^2+2xh+h^2)}{h} \ \ en\ effectuant$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)(2x^2+2xh+h^2) \ \ en\ simplifiant$$

= $2x \bullet 2x^2 = 4x^3$ Si vous vous rendez jusqu'ici vos yeux doivent saigner… c'est normal.

Exercice 6.3

a) Vérifions si *f(x)* est continue en *x = 4*

1ère condition: $f(4) = 6$

2ème condition:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 5$$

$$Donc,\ \lim_{x\to 4} f(x) = 5$$

3ème condition : $\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)\ \ car\ 5 \neq 6$

La fonction est donc discontinue en *x = 4*, car la 3ème condition est non respectée.

b) Vérifions si *f(x)* est continue en x = 2

1ère condition: *f(2)* = 5

2ème condition:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (7 - x) = 5$$

$$Donc,\ \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

3ème condition : $\lim_{x\to 2} f(x) =$
$f(4)\ \ la\ condition\ 2\ arrive\ au\ même\ résultat\ que\ la\ condition\ 1.$

La fonction est donc continue en *x* = 2, car les 3 conditions sont respectées.

La fonction *f* est représentée par le graphique ci-contre.