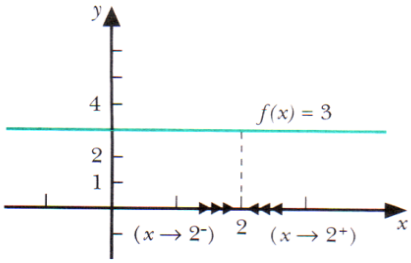
Chapitre 5 : Propositions sur les limites

Il existe 8 propositions sur les limites qui permettent de déterminer les valeurs de celles-ci directement sans faire tendre x vers des valeurs plus petites ou plus grandes à l'aide de tableaux.

Proposition 1: $\lim\limits_{x \to a} K = K$, où K est une constante

Exemple 5.1

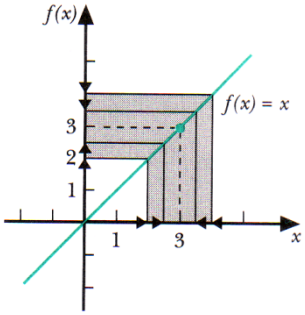
$\lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$



Proposition 2: $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Exemple 5.2

$\lim\limits_{x \to 3} x = 3$



Proposition 3: Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, alors

$$\lim_{x \to a}[Kf(x)] = K \lim_{x \to a} f(x) = KL \quad \text{si } K \in \mathbb{R}$$

Exemple 5.2

$\lim\limits_{x \to 8} 3x = 3 \lim\limits_{x \to 8} x$ (Proposition 3)

= 3 x 8 (Proposition 2)

= 24

Addition et soustraction

Proposition 4 : $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = M$, alors

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x})] = \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} f(\mathrm{x}) + \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = L + M}$$

Notez que la proposition 4 fonctionne aussi avec une différence :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(\mathrm{x}) - g(\mathrm{x})] = \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} f(\mathrm{x}) - \lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} g(\mathrm{x}) = L - M}$$

En résumé, la limite d'une somme est égale à la somme des limites et la limite d'une différence est égale à la différence des limites.

<u>Exemple 5.3</u>

$\lim_{x\to 1}(\mathrm{x} + 7) = \lim_{\mathrm{x}\to 1} \mathrm{x} + \lim_{\mathrm{x}\to 1} 7$ (Proposition 4)

= 1 + 7 (Proposition 2 et 1)

= 8

<u>Exemple 5.4</u>

$\lim_{x\to 4}(6\mathrm{x} - 5) = \lim_{\mathrm{x}\to 4} 6\mathrm{x} - \lim_{\mathrm{x}\to 4} 5$ (Proposition 4)

$6 \lim_{x\to 4} \mathrm{x} - 5$ (Propositions 3 et 1)

= 6 x 4 – 5 (Proposition 2)

= 19

Produit

Proposition 5 : $\lim_{x\to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = M$, alors

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(\mathrm{x})\, g(\mathrm{x})] = (\lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} f(\mathrm{x}))\ \mathrm{x}\ (\lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} g(\mathrm{x})) = L\mathrm{x}M}$$

En résumé, la limite d'un produit est égale au produit des limites.

<u>Exemple 5.5</u>

$\lim_{x\to 2}(2x - 1)(3x + 5) = (\lim_{x\to 2}(2x - 1))\ \mathrm{x}\ (\lim_{x\to 2}(3x + 5))$ Proposition 5

$(\lim_{x\to 2} 2x - \lim_{x\to 2} 1)\ \mathrm{x}\ (\lim_{x\to 2} 3x + (\lim_{x\to 2} 5)$ Proposition 4

$= (2 \lim_{x\to 2} x - 1)\ \mathrm{x}\ (3 \lim_{x\to 2} x + 5)$ *propositions* 3 *et* 1

= (2x2 – 1) x (3x2 + 5) Proposition 2

= 3 x 11

= 33

Exposants

$$\textbf{Proposition 6 : } \lim_{x \to a} \mathbf{x^n} = \boldsymbol{a^n} \text{ où } \mathbf{n} \in \mathbb{R}$$

<u>Exemple 5.6</u>

$$\lim_{x \to 6} x^3 = 6^3 = 216$$

Quotient

Proposition 7 : $\lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$, alors

$$\lim_{x \to a} [\frac{f(\mathrm{x})}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \; si \; M \neq 0$$

En résumé, la limite d'un quotient est égale au quotient des limites.

<u>Exemple 5.7</u>

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{4x - 1} =$$

$$\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - 4x^2 + 3}{\lim_{x \to 2} 4x - 1} = \qquad proposition\ 7$$

$$\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - \lim_{x \to 2} 4x^2 + \lim_{x \to 2} 3}{\lim_{x \to 2} 4x - \lim_{x \to 2} 1} = \qquad proposition\ 4$$

$$\frac{2^3 - 4 \lim_{x \to 2} x^2 + 3}{4 \lim_{x \to 2} x - 1} = \qquad propositions\ 6, 3\ et\ 1$$

$$\frac{2^3 - 4\mathrm{x}2^2 + 3}{4\mathrm{x}2 - 1} = \qquad proposition\ 6\ et\ 2$$

$$= \frac{-5}{7}$$

Proposition 8 : $\lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = \mathrm{L}$, alors

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^r = [L]^r \text{ où } r > 0}$$

En résumé, l'exposant *r* s'attribue à l'ensemble de la limite.

<u>Exemple 5.8</u>

$\lim_{x \to 3} (2x + 1)^4 =$

$\left[\lim_{x \to 3} (2x + 1)\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 8$

$\left[\lim_{x \to 3} 2x + \lim_{x \to 3} 1\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 4$

$\left[2 \lim_{x \to 3} x + 1\right]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 3\ et\ 1$

$[2\mathrm{x}3 + 1]^4 =$ $\qquad$ $proposition\ 2$

2401

Exercices 5.1

Évaluer à l'aide des propositions les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3}{5x^2 + 4}$

b) $\lim_{x \to 1} [(7x - 3)(4x^2 - 1)]$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right)^3$

Réponses

Exercices 5.1

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3}{5x^2 + 4} =$

$\frac{\lim_{x\to 2} x^3}{\lim_{x\to 2} 5x^2 + 4} =$ $\quad$ $proposition\ 7$

$\frac{2^3}{\lim_{x\to 2} 5x^2 + \lim_{x\to 2} 4} =$ $\quad$ $propositions\ 6\ et\ 4$

$\frac{2^3}{\left(\lim_{x\to 2} 5\right)\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + 4} =$ $\quad$ $proposition\ 5\ et\ 1$

$\frac{2^3}{5\ x\ 2^2 + 4} =$ $\quad$ $proposition\ 1\ et\ 6$

$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to 1} [(7x-3)(4x^2-1)] =$

$\left(\lim_{x\to 1}(7x-3)\right)\left(\lim_{x\to 1}(4x^2-1)\right) =$ $\quad$ $proposition\ 5$

$\left(\lim_{x\to 1} 7x - \lim_{x\to 1} 3\right)\left(\lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} 1\right) =$ $\quad$ $proposition\ 4$

$\left(7 \lim_{x\to 1} x - 3\right)\left(4 \lim_{x\to 1} x^2 - 1\right) =$ $\quad$ $propositions\ 3\ et\ 1$

$(7x1 - 3)(4x1^2 - 1) =$ $\quad$ *propositions 2 et 6*

4 x 3 = 12

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right)^3 =$

$\left[\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 7x + 2}{3x - 1}\right]^3 =$ $\quad$ $proposition\ 8$

$$\left[\frac{\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 - 7x + 2}{\lim\limits_{x\to 0} 3x - 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 7$$

$$\left[\frac{\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 0} 7x + \lim\limits_{x\to 0} 2}{\lim\limits_{x\to 0} 3x - \lim\limits_{x\to 0} 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 4$$

$$\left[\frac{3\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 7\lim\limits_{x\to 0} x + 2}{3\lim\limits_{x\to 0} x - 1}\right]^3 = \qquad propositions\ 3\ et\ 1$$

$$\left[\frac{3\mathrm{x}0^2 - 7\mathrm{x}0 + 2}{3\mathrm{x}0 - 1}\right]^3 = \qquad proposition\ 6\ et\ 2$$

$$\left[\frac{2}{-1}\right]^3 = -8$$