Chapitre 4 : Les limites

Le concept de limite nous sert à décrire ce qui se produit avec la valeur de *f*(x) lorsque nous utilisons une valeur de x qui est non définie. Pour ce faire, nous prenons des valeurs de x qui voisinent x.

Exemple 4.1

Soit *f*(x) = $\frac{x^3-3x^2}{x-3}$ où le dom *f* = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Comme *f*(3), est non définie, car si x = 3 le dénominateur est nul, voyons ce qui se produit par contre lorsque les valeurs de x sont voisines de 3.

Valeurs voisines de 3 signifie:

- Lorsque les valeurs de x sont plus petites que 3 et s'approchant de 3 ($x \to 3^-$)

ou

- Lorsque les valeurs de x sont plus grandes que 3 et s'approchant de 3 ($x \to 3^+$)

Autrement dit, la valeur de x n'égale jamais exactement 3.

Trouvons maintenant les valeurs de *f*(x) correspondantes lorsque $x \to 3^-$

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	… $\to 3^-$
f(x)	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001	… $\to 9$

Nous remarquons assez aisément que les valeurs de f(x) tendent vers 9 lorsque x tend vers 3^-

Nous écrivons :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9 \quad ou \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^3-3x^2}{x-3} = 9$$

Trouvons maintenant les valeurs de *f*(x) correspondantes lorsque $x \to 3^+$

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	… $\to 3^+$
f(x)	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001	… $\to 9$

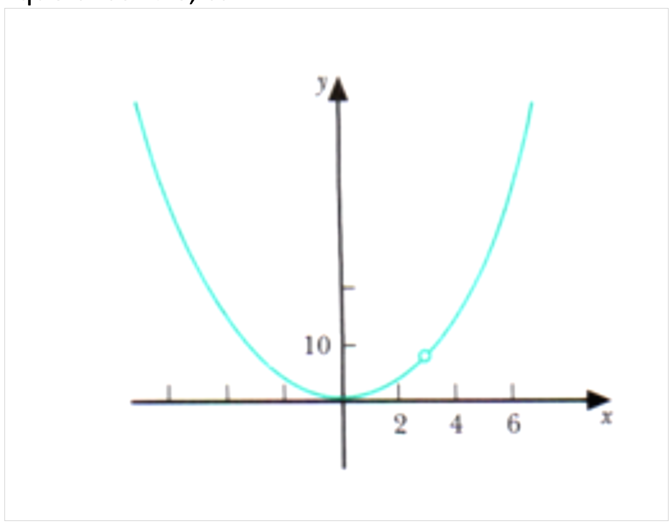
Nous remarquons assez aisément, encore une fois, que les valeurs de f(x) tendent vers 9 lorsque x tend vers 3^+.

Finalement peu importe les valeurs de x s'approchant de 3 par la gauche ($x \to 3^-$) ou par la droite ($x \to 3^+$), *f*(x) s'approche de 9. Nous écrivons donc :

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9$$

La fonction f est représentée par le graphique ci-contre, car

f(x) = $\frac{x^3-3x^2}{x-3} = \frac{x^2(x-3)}{x-3}$ = x^2 si $x \neq 3$



Exercices 4.1

Soit *f*(x) = $\frac{x^4+2x}{x}$ où le dom *f* = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\text{Évaluer : } \lim_{x \to 0} \frac{x^4+2x}{x}$$

Exercices 4.2

Soit f(x) = *f*(x) = $\frac{x-5}{x^2-5x}$ où dom f = $\mathbb{R}\setminus\{0{,}5\}$.

$$\text{Évaluer } \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-5x}$$

Réponses

Exercices 4.1

Pour ce faire faites un tableau lorsque x → 0^- et lorsque x → 0^+

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	… → 0^-
f(x)	1,999	1,999999	1,999999999	1,999999999999	… → 2

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	… → 0^+
f(x)	2,001	2,000001	2,000000001	2,000000000001	… → 2

$$\text{Donc,} \lim_{x \to 0} f(x) = 2 \quad ou \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 2x}{x} = 2$$

Ceci est normal car si nous factorisons le numérateur :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x^3 + 2)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} (x^3 + 2) = 2 \; si \; x \to 0$$

Exercices 4.2

Pour ce faire faites un tableau lorsque x → 5^- et lorsque x → 5^+

x	4,9	4,99	4,999	4,9999	… → 5^-
f(x)	0,2040816327	0,2004008016	0,200040008	0,2000040001	… → 0,2

x	5,1	5,01	5,001	5,0001	… → 5^+
f(x)	0,1960784314	0,1996007984	0,199960008	0,1999960001	… → 0,2

$$\text{Donc,} \lim_{x\to 5} f(x) = 0{,}2 \quad ou \quad \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-5x} = 0{,}2$$

Ceci est encore normal, car si nous factorisons le dénominateur :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x(x-5)}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \ si\ x \ \to 5$$