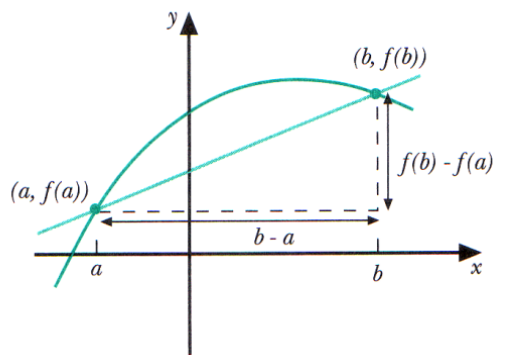
Chapitre 3 : Taux de variation

Notion 3.1 Taux de variation moyen (vitesse moyenne)

Définition : Le taux de variation moyen d'une fonction *f* sur un intervalle [a,b] est noté $TVM_{[a,b]}$,
Est défini par $TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. (Autrement dit le TVM est la pente d'une sécante passant par les 2 points (a,*f*(a)), (b,*f*(b)).)

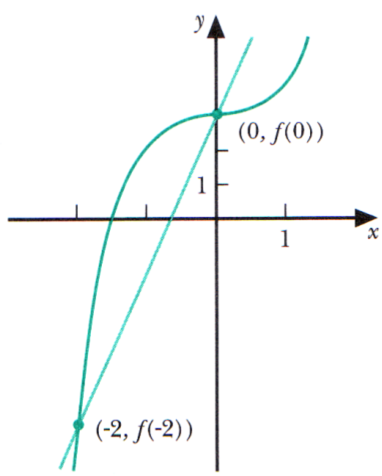


Exemple 3.1

Soit $f(x) = x^3 + 3$

Calculons le $TVM_{[-2,0]}$ et représentons la courbe ainsi que la sécante correspondante.

$TVM_{[-2,0]} = \frac{f(0) - f(-2)}{0-(-2)} = \frac{3-(-5)}{2} = 4$



La pente de la sécante passant par les points (-2, *f*(-2)) et (0, *f*(0)) est égale à 4.

Le taux de variation moyen (pente de la sécante) correspond aussi à la vitesse moyenne (Comme en physique avec M. Houle.)

<u>Exemple 3.2</u>

La position *s* d'un mobile en chute libre, par rapport à son point de départ, en fonction du temps *t* est donnée par $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 9{,}8$ m/s² et *t* est en secondes.

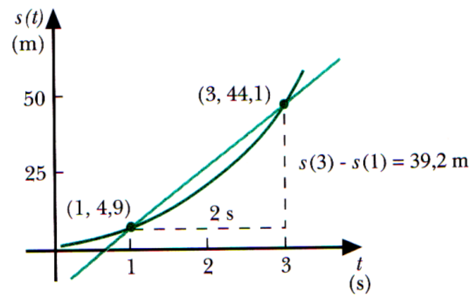
Calculons la vitesse moyenne ($TVM_{[1,3]}$) de ce mobile entre 1s et 3 s.

$v_{[1s,3s]} = \frac{s(3) - s(1)}{3-1}$, car la position est donnée par *s*(t)

$= \frac{44{,}1\ m - 4{,}9\ m}{3\ s - 1\ s}$, car $s(t) = 4{,}9t^2$

$= \frac{39{,}2\ m}{2\ s} = 19{,}6$ m/s.

Donc, la vitesse moyenne entre 1 s et 3 s est de 19,6 m/s.



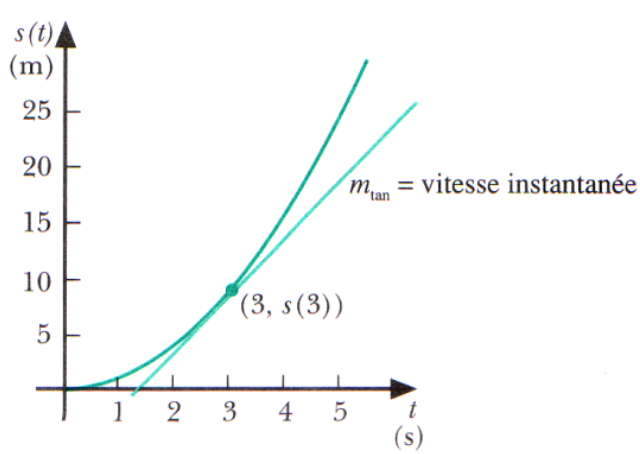
Notion 3.2 Pente de la tangente (vitesse instantanée)

> Définition : Une tangente est une droite sécante qui touche en un seul point de la courbe.

<u>Exemple 3.3</u>

Soit un mobile dont la position *s* en fonction du temps *t* est donnée par la règle $s(t) = t^2$

Nous désirons, par cet exemple, calculer la vitesse du mobile au temps *t* = 3 s. Cette vitesse est appelée une *vitesse instantanée* qui correspond à la pente de la tangente à 3 s.



Cependant pour calculer cette vitesse instantanée qui provient d'une pente, il est nécessaire de calculer cette pente à partir de deux points. (Donc d'abord à partir d'une sécante qui tend à devenir la tangente à la courbe à 3 s.) Voici ce que je veux dire :

Pour trouver cette vitesse instantanée, nous devons d'abord calculer la vitesse moyenne du mobile sur des intervalles [3 s, *t* s], <u>où nous choisirons *t* de plus en plus près de 3 s, afin de s'approcher de plus en plus de la pente de la tangente à 3 s.</u>

Calculons la vitesse moyenne sur les intervalles de temps suivants :

a) $v_{[3\text{ s},\, 5\text{ s}]} = \dfrac{s(5) - s(3)}{5-3} = \dfrac{25\ m - 9\ m}{2\ s} = \dfrac{16\ m}{2\ s} = 8$ m/s

b) $v_{[3\text{ s},\, 4\text{ s}]} = \dfrac{s(4) - s(3)}{4-3} = \dfrac{16\ m - 9\ m}{1\ s} = 7$ m/s

c) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}5\text{ s}]} = \dfrac{s(3{,}5) - s(3)}{3{,}5-3} = \dfrac{12{,}25\ m - 9\ m}{0{,}5\ s} = 6{,}5$ m/s

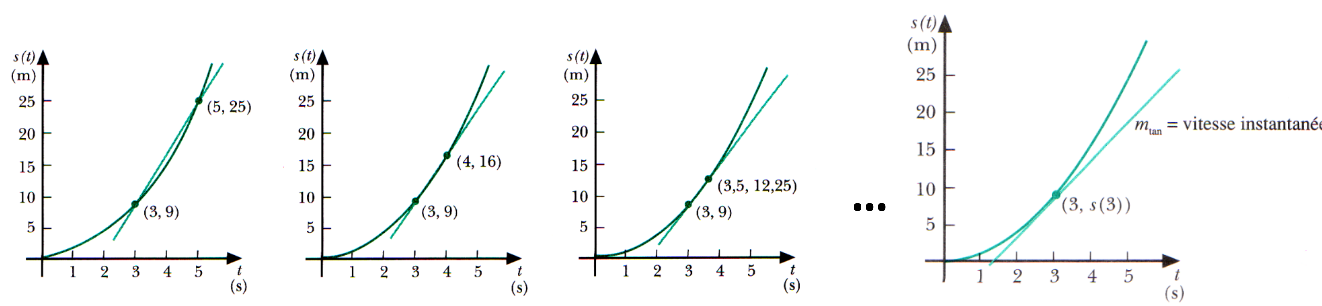
d) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}1\text{ s}]} = \dfrac{s(3{,}1) - s(3)}{3{,}1-3} = \dfrac{9{,}61\ m - 9\ m}{0{,}1\ s} = 6{,}1$ m/s

d) $v_{[3\text{ s},\, 3{,}001\text{ s}]} = \dfrac{s(3{,}001) - s(3)}{3{,}001-3} = \dfrac{9{,}006001\ m - 9\ m}{0{,}001\ s} = 6{,}001$ m/s

On peut facilement constater qu'à ***la limite*** la vitesse moyenne s'approche de 6 m/s.

Voici une représentation des vitesses moyennes calculées en a), b) et c)

Chaque graphique représente les sécantes données, et comme nous l'avons vu précédemment la pente de ces sécantes correspond à la vitesse moyenne sur l'intervalle [3 s, *t* s]



Pente de la sécante 8 m/s **Pente de la sécante 7 m/s** **Pente de la sécante 6,5 m/s** **…** **Pente de la tangente 6 m/s**

Nous remarquons que, <u>*à la limite*</u>, plus la deuxième borne de l'intervalle tend vers 3, plus la sécante devient une tangente à la courbe au point (3, s(3)) ou (3, 9) **dont la pente s'approche <u>*à la limite*</u> de 6 m/s.**

Ce 6 m/s est appelée la vitesse instantanée et elle correspond à la pente de la tangente au point (3, 9). On verra **plus tard** que cette vitesse instantanée à 3 s. ou pente de la tangente à 3 s. correspond à la **dérivée de la fonction *s*(t) = t^2 évaluée lorsque t = 3 s. (** *s* '(t) = 2t et si t = 3 *s* '(3) = 2(3) = 6) **)**

Exercices 3.1

La position *s* (en m) d'un mobile en fonction du temps *t* (en s) est donnée par *s*(t) = $t^2 + 2t$

a) Calculer la vitesse moyenne de ce mobile sur l'intervalle [1s, 4s].

b) Calculer, *à la limite*, la vitesse instantanée du mobile à t = 5 s. en considérant 4 intervalles.

c) Que représente cette vitesse instantanée graphiquement?

Exercices 3.2

La position *s* (en m) d'un mobile en fonction du temps *t* (en s) est donnée par la règle

s(t) = $2t^2 – 2$

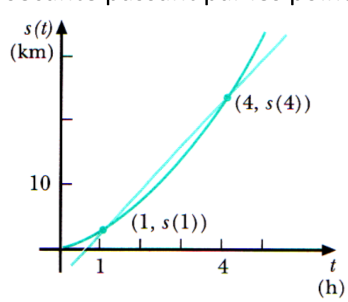
a) Calculer, à la limite, la vitesse instantanée du mobile à t = 2 s en considérant 4 intervalles.

b) Que représente cette vitesse instantanée graphiquement?

Réponses

Exercice 3.1

a) $V_{[1,4]} = \frac{s(4) - s(1)}{4-1} = \frac{24\,m - 3\,m}{3\,s} = \frac{21}{3}$ = 7 m/s (Cette vitesse moyenne est correspond à la pente de la sécante passant par les point (1,s(1)) et (4,s(4)) de la fonction s(t).)



b) Pour calculer la vitesse instantanée, je vais calculer les vitesses moyennes $v_{[5,\,6]}$, $v_{[5,\,5{,}5]}$, $v_{[5,\,5{,}1]}$ et $v_{[5,\,5{,}001]}$ afin de voir *qu'à la limite* les vitesses moyennes tendent à s'approcher de la vitesse instantanée de 12 m/s

$$v_{[5,\,6]} = \frac{s(6)-s(5)}{6-5} = \frac{48\ m - 35\ m}{1\ s} = 13 \text{ m/s}$$

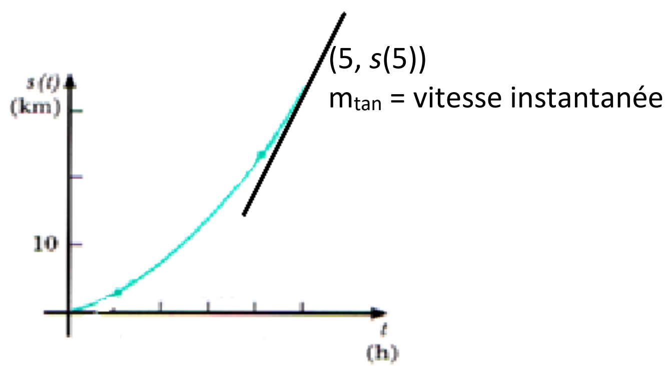
$$v_{[5,\,5{,}5]} = \frac{s(5{,}5)-s(5)}{5{,}5-5} = \frac{41{,}25\ m - 35\ m}{0{,}5\ s} = 12{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_{[5,\,5{,}1]} = \frac{s(5{,}1)-s(5)}{5{,}1-5} = \frac{36{,}21\ m - 35\ m}{0{,}1\ s} = 12{,}1 \text{ m/s}$$

$$v_{[5,\,5{,}001]} = \frac{s(5{,}001)-s(5)}{5{,}001-5} = \frac{35{,}012001\ m - 35\ m}{0{,}001\ s} = 12{,}001 \text{ m/s}$$

On peut donc voir qu'à la limite, les vitesses moyennes tendent vers 12 m/s. Cette dernière correspond à la vitesse instantanée.

c) Cette vitesse instantanée correspond graphiquement à la pente de la tangente au point (5, *s*(5)) ou (5, 35).



Exercice 3.2

a) Pour trouver la vitesse instantanée, je vais trouver les vitesses moyennes $v_{[2,\,2{,}1]}$, $v_{[2,\,2{,}01]}$, $v_{[2,\,2{,}001]}$ et $v_{[2,\,2{,}0001]}$

$$v_{[2,\,2{,}1]} = \frac{s(2{,}1)-s(2)}{2{,}1-2} = \frac{6{,}82\ m - 6\ m}{0{,}1\ s} = 8{,}2 \text{ m/s}$$

$$v_{[2,\,2{,}01]} = \frac{s(2{,}01)-s(2)}{2{,}01-2} = \frac{6{,}0802\ m - 6\ m}{0{,}01\ s} = 8{,}02 \text{ m/s}$$

$$v_{[2,\,2{,}001]} = \frac{s(2{,}001)-s(2)}{2{,}001-2} = \frac{6{,}008002\ m - 6\ m}{0{,}001\ s} = 8{,}002 \text{ m/s}$$

$$v_{[2,\,2{,}0001]} = \frac{s(2{,}0001)-s(2)}{2{,}0001-2} = \frac{6{,}00080002\ m - 6\ m}{0{,}0001\ s} = 8{,}0002 \text{ m/s}$$

À la limite la vitesse instantanée est de 8 m/s. Cette dernière correspond à la vitesse instantanée.

b) Cette vitesse instantanée correspond graphiquement à la pente de la tangente au point (2, s(2)) ou (2, 6).