Chapitre 15 : Dérivée des réciproques des fonctions trigonométriques

15.1 Dérivée des fonctions réciproques de sinus, cosinus, tangente et cotangente

Dans ce dernier chapitre, nous étudierons les dérivées des fonctions réciproques ou inverses de sinus, cosinus, tangente et cotangente (arc sin, arc cos, arc tan et arc cot)

Dérivée d'arc sin x :

Proposition 1 : Si $f(x) = \ arc\ sin\ x,\ \ alors\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Prouvons ensemble cette proposition.

$\sin(arc\sin x) = x, car\ \sin(sin^{-1}x) = x\ tel\ que\ vu\ dans\ mon\ cours!$

$[\sin(arc\ sinx)]' = x'\ \ en\ dérivant\ le\ deux\ membres\ de\ l'équation$

$\cos(\arcsin x)(arcsinx)' = 1\ \ Proposition\ 1' du\ chapitre\ 14$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}\ puisque\ nous\ recherchons\ la\ dérivée\ de\ arcsin\ x, donc\ on\ l'isole$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos\big(f(x)\big)}\ \ car\ comme\ la\ proposition\ 1\ le\ dit\ \ f(x) = \ arc\ sin\ x$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\cos y}\ \ \ car\ y = f(x)\ par\ définition$

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}}$

Car comme : $sin^2 y + cos^2 y = 1, donc\ cos^2 y = 1 - sin^2 y, donc\ \cos y = \sqrt{1 - sin^2 y}$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *Fin de la preuve!*

Car $x^2 = sin^2 y\ et\ en\ voici\ le\ pourquoi$:

si $y = arc\sin x,\ \ alors$

$\sin y = \sin arc\sin x, appliqué\ le\ sinus\ aux\ deux\ membres$

Donc, $sin\, y = \sin sin^{-1} x$

$\sin y = x$

Oui, elle est assez complexe, mais des preuves de ce genre, vous en aurez à la tonne dans votre cours de calcul 1…

<u>Exemple 15.1</u>

Calculons la dérivée de :

$f(x) = x^2 arc \sin x$

$f'(x) = (x^2)' \arcsin x + x^2 (arc \sin x)'$ $\quad Dérivée\ d'un\ produit$

$f'(x) = 2x \arcsin x + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ $\quad Proposition\ 1$

$f'(x) = 2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Proposition 1' : Si $H(x) = arc\ sin\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}} f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

<u>Exemple 15.2</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arcsin(2x^5 - 8x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}} (2x^5 - 8x)'$ $\quad Proposition\ 1'$

$f'(x) = \frac{10x^4 - 8}{\sqrt{1-(2x^5-8x)^2}}$ $\quad ce\ qui\ est\ très\ simple\ comme\ vous\ le\ voyez\ \ldots$

Dérivée d'arc cos x :

Proposition 2 : Si $f(x) = arc\ cos\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Comme la preuve de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 1, je passe immédiatement à un exemple.

Exemple 15.3

Calculons la dérivée de : $f(x) = (\arccos\ x)^3$

$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2(\arccos\ x)'$ $\quad Dérivation\ en\ chaîne$

$f'(x) = 3(\arccos\ x)^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ $\quad Proposition\ 2$

$$f'(x) = \frac{-3(\arccos\ x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 2' : Si $H(x) = \ arc\ cos\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)^2]}} f'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)^2]}}$

Exemple 15.4

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arccos(-x^3 + 7x^2 - 4)$

$$f'(x) = \frac{-(-3x^2 + 14x)}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 14x}{\sqrt{1-(-x^3+7x^2-4)^2}}$$

Dérivée d'arc tan x :

Proposition 3 : Si $f(x) = \ arc\ tan\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exemple 15.5

Calculons la dérivée de : $f(x) = (lnx)(\arctan x)$

$f'(x) = (lnx)'\arctan x + lnx(\arctan x)'$

$f'(x) = \frac{1}{x}\arctan x + lnx\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ $\quad Dérivée\ de\ lnx\ et\ proposition\ 3$

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{x} + \frac{lnx}{1+x^2}$$

Proposition 3' : Si $H(x) = \ arc\ tan\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

<u>Exemple 15.6</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = \arctan(x^2 - 7)^3$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6}[(x^2 - 7)^3]' \qquad Proposition\ 3'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6}\ 3(x^2 - 7)^2\ \ (x^2 - 7)' \qquad Dérivation\ en\ chaîne$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 7)^6}\ 3(x^2 - 7)^2\ (2x)$$

$$f'(x) = \frac{6x(x^2 - 7)^2}{1 + (x^2 - 7)^6}$$

Dérivée d'arc cot x :

Proposition 4 : Si $f(x) = \ arc\ cot\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Comme cette proposition est très similaire à la proposition 3, passons immédiatement à la suivante.

Proposition 4' : Si $H(x) = \ arc\ cot\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

<u>Exemple 15.7</u>

Calculons la dérivée de : $f(x) = \operatorname{arccot}(x^3 + \tan x)$

$$f'(x) = \frac{-(x^3 + \tan x)'}{1 + (x^3 + \tan x)^2} \qquad Proposition\ 4'$$

$$f'(x) = \frac{-\left(3x^2 + sec^2 x\right)}{1 + (x^3 + \tan x)^2} \qquad Proposition\ 3\ du\ chap.14$$

Exercice 15.1

Calculons la dérivée de :

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc\tan x)$

c) $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{arc\cot 2x}$

d) $f(x) = arc\sin(\tan x) - \arccos(cscx)$

e) $f(x) = \frac{arc\cos x^3}{arc\sin x^2}$

f) $f(x) = \ln(arc\tan e^x)$

g) $f(x) = 2x^3 - \sin x \operatorname{arccot} 5x$

15.2 Dérivée des fonctions réciproques de sécante et cosécante

En conclusion de ce chapitre, voici les propositions concernant les dérivées des fonctions arc sécante et arc cosécante. Cependant, je vous fournirai seulement que les propositions, car la manière de trouver les dérivées de ces fonctions est, à mon avis, trop redondante pour les analyser plus en détails par des exemples ou des exercices. Pour tout vous dire, certains professeurs de cégep ne les étudient même pas…

Dérivée d'arc sec x :

Proposition 5 : Si $f(x) = arc\ sec\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 5' : Si $H(x) = arc\ sec\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Dérivée d'arc csc x :

Proposition 6 : Si $f(x) = arc\ csc\ x,\ alors\ f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Proposition 6' : Si $H(x) = arc\ csc\ f(x),\ alors\ H'(x) = \frac{-1}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} f'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Ces dérivées devraient être la fin, oui oui la **FIN** de votre cours de Calcul 1. J'espère que ce document aura su vous aider à mieux comprendre votre premier cours de calcul différentiel du cégep. Il ne vous restera plus qu'à attaquer le cours de Calcul 2; LES INTÉGRALES!!!!

Réponses

Exercice 15.1

a) $f(x) = (\sin x - 5)\ arccotx \quad alors,$

$f'(x) = \ (sinx - 5)'(\operatorname{arccot} x) + (\sin x - 5)(\operatorname{arccot} x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$

$f'(x) = \cos x\ (\operatorname{arccot} x) + (\sin x - 5)\dfrac{-1}{1+x^2} \quad Proposition\ 1\ (chap.14)\ et\ 4$

$f'(x) = \cos x\ (\operatorname{arccot} x) - \dfrac{(\sin x - 5)}{1+x^2}$

b) $f(x) = (\arccos x)(arc\tan x) \quad alors,$

$f'(x) = (\arccos x)'(\arctan x) + (\arccos x)(\arctan x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$

$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\arctan x) + (\arccos x)\ \dfrac{1}{1+x^2} \quad Propositions\ 2\ et\ 3$

$f'(x) = \dfrac{-\arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arccos x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{arc\cot 2x} \quad alors,$

$f'(x) = \dfrac{\left(\arctan\sqrt{x}\right)' arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\ (arc\cot 2x)'}{(arc\cot 2x)^2} \quad Dérivée\ d'un\ quotient$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}\ arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\dfrac{-(2x)'}{1+(2x)^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2} \quad Propositions\ 3'\ et\ 4'$

$$f'(x) = \frac{\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}{1+x}\ arc\cot 2x - \arctan\sqrt{x}\left(\frac{-2}{1+4x^2}\right)}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\ arc\cot 2x + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{arc\cot 2x}{2\sqrt{x}(1+x)} + \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+4x^2}}{(arc\cot 2x)^2}$$

d) $f(x) = arc\sin(\tan x) - \arccos(cscx) \quad alors,$

$f'(x) = [\arcsin tanx]' - \ [\arccos(cscx)]'$

$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{-(-\csc x\cot x)}{\sqrt{1-csc^2x}} \quad Propositions\ 3\ Chap.\ 14, 1' et\ propositions\ 6\ chap.\ 14, 2'$

$f'(x) = \frac{sec^2x}{\sqrt{1-tan^2x}} - \frac{\csc x\cot x}{\sqrt{1-csc^2x}}$

e) $f(x) = \frac{arc\cos x^3}{arc\sin x^2} \quad alors,$

$$f'(x) = \frac{(arc\cos x^3)'\arcsin x^2 - \arccos x^3(\ arc\sin x^2)'}{(arc\sin x^2)^2} \quad Dérivée\ d'un\ quotient$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-(3x^2)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\arcsin x^2 - \arccos x^3\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}}{(arc\sin x^2)^2} \quad Proposition\ 2' et\ 1'$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-3x^2\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{2x\arccos x^3}{\sqrt{1-x^4}}}{(arc\sin x^2)^2}$$

f) $f(x) = \ln(arc\tan e^x) \quad alors,$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x}\,(arc\tan e^x)' \quad Dérivée\ de\ \ln\ et\ dérivation\ en\ chaîne$$

$$f'(x) = \frac{1}{arc\tan e^x}\,\frac{e^x}{1+e^{2x}} \quad Dérivée\ de\ e^x\ Proposition\ 3'$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(arc\tan e^x)(1+e^{2x})}$$

g) $f(x) = 2x^3 - \sin x \operatorname{arccot} 5x \quad alors,$

$$f'(x) = (2x^3)' - (\sin x \operatorname{arccot} 5x)'$$

$$f'(x) = 6x^2 - (\sin x)' \operatorname{arccot} 5x + sinx\ (\operatorname{arccot} 5x)' \quad Dérivée\ d'un\ produit$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x \operatorname{arccot} 5x + \sin x\ \frac{-5}{1+25x^2}$$

$$f'(x) = 6x^2 - \cos x \operatorname{arccot} 5x - \frac{5\sin x}{1+25x^2}$$