Chapitre 13 : Optimisation

Comme vous l'avez vu lors de votre cours de 5ème secondaire nous pouvons trouver des maximums et des minimums liés à des problèmes écrits comme trouver le maximum de profits ou le minimum de dépenses d'une entreprise.

Dans ce chapitre, nous ferons la même chose, mais sans faire de polygones de contraintes pour trouver le sommet qui optimise la situation. Nous utiliserons maintenant le test de la dérivée première et le test de la dérivée seconde afin de trouver le maximum ou minimum d'un problème écrit.

Voici les 6 grandes étapes afin d'optimiser un problème écrit :

- 1) Définir les variables
- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)
- 3) Chercher les équations entre les variables
- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable
- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première **ou** test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Max ou Min)
- 6) Formuler la réponse

Voici un exemple concret qui témoigne bien de ces étapes à suivre.

<u>Exemple 13.1</u>

Chosebinne dispose de 120m de clôture pour délimiter un terrain rectangulaire. Quelle seront les dimensions du terrain pour que son aire soit maximale?

- 1) Définir les variables

x : largeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = xy

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre : *2x + 2y = 120* d'où $y = \frac{120-2x}{2}$ et $x = \frac{120-2y}{2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

$A(x, y) = x\left(\frac{120-2x}{2}\right)$

$= x\,(60 - x)$

$= 60x - x^2$

$D'où\ A(x, y) = 60x - x^2$

Note : puisque x représente la longueur d'un côté et que le périmètre est de 120
il ne peut être plus grand que 60.
Donc, 0 ≤ *x* ≤ 60 ou *dom* A = [0, 60]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée première

1ère étape : $A'(x) = 60 - 2x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = 30$, d'où 30 est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	0		30		60
A'(x)	∄ (car pas de base…)	+	0	–	∄ (car pas de hauteur)
A		↗	900	↘	8
			Max		

- 6) Formuler la réponse

Si x = 30 alors y = ?

Comme $y = \frac{120-2x}{2}$, alors $y = \frac{120-2(30)}{2}$, alors y = 30

Les dimensions recherchées sont donc de 30m par 30m.

Note : Nous aurions pu faire aussi le test de la dérivée seconde pour obtenir la même conclusion. En voici la preuve :

1ère étape : calculer *A'(x)*

$A'(x) = 60 - 2x$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *A*.

1) $A'(x) = 0\ si\ x = 30, \text{d'où 30 est un nombre critique}$

2) $A'(x)$ est définie pour tous $x, \text{d'où aucun autre nombre critique}$

3ème étape : calculer *A''(x)*

$A''(x) = -2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$A''(30) = -2\ donc\ \boldsymbol{A''(30) < 0}\ donc\ \big(30, A(30)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ A.$

Je vous rappelle que si le test de la dérivée première fonctionne, il n'est pas nécessaire de faire le test de la dérivée seconde. Vous pouvez tout de même faire le test de la dérivée seconde en premier pour trouver le min ou le max, car c'est un plus rapide lorsqu'il fonctionne.

<u>Exemple 13.2</u>

Trouver deux nombres dont la somme est 12 et le produit est maximal. C'est le genre de problème qui pourrait être une belle énigme de la semaine (Nostalgie…)

- 1) Définir les variables

x : 1er nombre

y : 2ème nombre

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

P(x, y) = xy

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Puisque, *x + y = 12* alors, $y = 12 - x$ et $x = 12 - y$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

A(x, y) = $x(12 - x)$

$D'o\text{ù}\ A(x, y) = 12x - x^2$

Note: Puisque x représente la valeur du 1er nombre, il peut prendre n'importe quelle valeur d'où*do m P =* $\mathbb{R}$

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde (car plus rapide que le test de la dérivée première…)

1ère étape : $P'(x) = 12 - 2x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *P.*

1) $P'(x) = 0 \; si \; x = 6,$ d'où 6 est un nombre critique

2) $P'(x)$ est définie pour tous $x,$ d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *P''(x)*

$P''(x) = -2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$P''(6) = -2 \; donc \; \boldsymbol{P''(6) < 0} \; donc \; \big(6, P(6)\big) \; est \; un \; maximum \; de \; P.$

- 6) Formuler la réponse

Si x = 6 alors y = ?

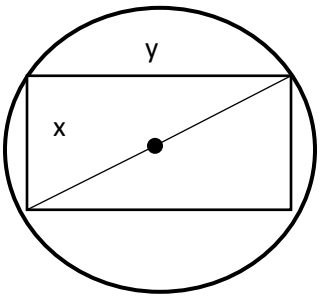
Comme $y = 12 - x$, alors $y = 12 - 6$ alors y = 6

Les deux nombres recherchés sont donc de 6 et 6!!!

Exercice 13.1

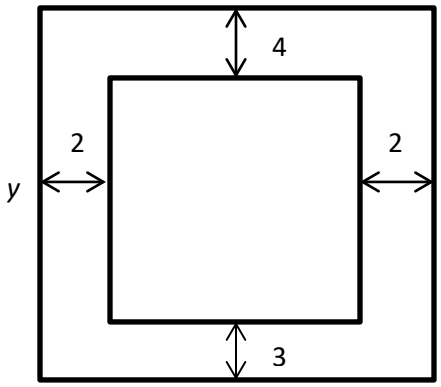
Résoudre les problèmes d'optimisation suivant :

a) Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire sera maximale à inscrire dans un cercle de rayon de 5 cm.

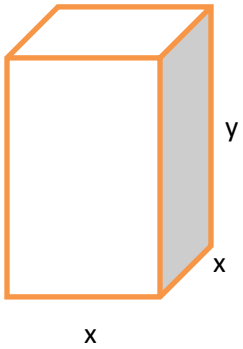


b) La somme de deux nombres positifs est 140. Quels sont ces deux nombres si le carré du premier ajouté au deuxième donne une somme minimale.

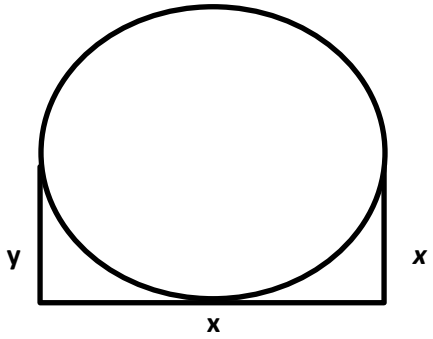
c) Une feuille a un périmètre de 110 cm. Si cette page comprend des marges de 4 cm en haut, de 3cm en bas et de 2 cm sur les deux côtés, quelles dimensions la page doit-elle avoir pour que sa surface soit maximale.



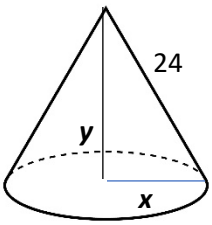
d) Une boîte en or à base carrée et ouverte sur le dessus a un volume de 36 cm^3. Déterminer les dimensions que doit avoir cette boîte pour que la quantité d'or nécessaire à sa fabrication soit minimale et évaluer cette quantité minimale d'or nécessaire.



e) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle est de 8m, déterminer les dimensions de la fenêtre d'aire maximale.



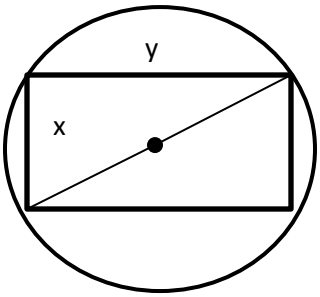
f) On forme un cône dont l'apothème est de 24 cm. Déterminer la hauteur du cône si son volume doit être maximal.



Réponses

Exercice 13.1

a) Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire sera maximale à inscrire dans un cercle de rayon de 5 cm.



- 1) Définir les variables

x : Hauteur

y : Largeur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = xy

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Comme le diamètre du cercle est de 10 cm, par Pythagore : $x^2 + y^2 = 10^2$

$Donc, \quad y^2 = 100 - x^2 \; alors \; y = \sqrt{100 - x^2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

Comme A(x, y) = xy

Alors, A(x, y) = $x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$

Remarque : $100 - x^2 \geq 0 \; donc, 100 \geq x^2 d'où \; x \leq 10$
Donc, *dom* A = [0, 10]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée première, car trouver A'' sera assez pénible et plus long…

1ère étape : $A'(x) = (x)'\left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\sqrt{100-x^2}\right)'$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{2}(100-x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)(100-x^2)'$$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{2}(100-x^2)^{\frac{-1}{2}}\right)(-2x)$$

$$A'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right) + \frac{-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{(100-x^2)}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Donc, $A'(x) = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0$ $si\ x = \sqrt{50}\ et\ x = -\sqrt{50}$ $(impossible\ car\ mesure\ négative\ de\ côté)$,

d'où $\sqrt{50}$ est un nombre critique

2) $A'(x)$ n'existe pas si $x = 10$ et $x = -10$ $(impossible\ car\ mesure\ négative\ de\ côté)$

d'où 10 est un nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	0		$\sqrt{50}$		10
A'(x)	∄ (car pas de base…)	+	0	–	∄ (car pas de hauteur)
A		↗	50	↘	
			Max		

- 6) Formuler la réponse

L'aire du rectangle est maximale lorsque x = $\sqrt{50}$

Comme $y = \sqrt{100 - x^2}$ alors $y = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2}\ alors, y = \sqrt{50}$

Les dimensions recherchées sont donc de $\sqrt{50}$m par $\sqrt{50}$m. Aire = $\sqrt{50}x\sqrt{50} = 50cm^2$

b) La somme de deux nombres positifs est 140. Quels sont ces deux nombres si le carré du premier ajouté au deuxième donne une somme minimale.

- 1) Définir les variables

x : premier nombre

y : deuxième nombre

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

S(x, y) = $x^2 + y$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Somme : *x + y = 140* d'où $y = 140 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

  S(x, y) = $x^2 + y = x^2 + (140 - x)$

  Comme la somme de deux nombres positifs est positives dom *S* =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $S'(x) = 2x - 1$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *S.*

1) $S'(x) = 0\ si\ x = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2}$ est un nombre critique

2) $S'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *S''(x)*

$S''(x) = 2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$S''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ donc\ \boldsymbol{S''}\left(\frac{1}{2}\right) > \mathbf{0}\ donc\ \left(\frac{1}{2}, S\left(\frac{1}{2}\right)\right)\ est\ un\ minimum\ de\ S.$$

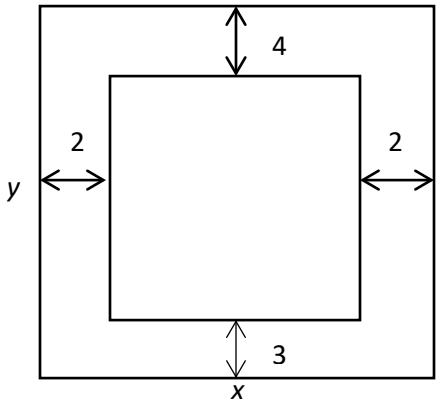
- 6) Formuler la réponse

Si x = $\frac{1}{2}$ alors y = ?

Comme $y = 140 - x$, alors $y = 140 - \frac{1}{2}$, alors y = 139,5

Le 1er nombre est 0,5 et le deuxième est 139,5

c) Une feuille a un périmètre de 110 cm. Si cette page comprend des marges de 4 cm en haut, de 3cm en bas et de 2 cm sur les deux côté, quelles dimensions la page doit-elle avoir pour que sa surface soit maximale.



- 1) Définir les variables

x : largeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

A(x, y) = $(x - 4)(y - 7)$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre : 2*x + 2y = 110* d'où $y = 55 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

A(x, y) = $(x-4)(y-7)$ *=* $(x-4)((55-x)-7)$

D'où A(x, y) = $(x-4)(48-x)$

Comme l'aire doit être positive x $\geq$ 4 et x $\leq$ 48, donc dom *A* = [4, 48]

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

A(x, y) = $-x^2+52x-192$ *en développant* $(x-4)(48-x)$

1ère étape : $A'(x) = -2x+52$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = 26,$ d'où 26 est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous $x,$ d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer A''*(x)*

$A''(x) = -2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$A''(26) = -2\ donc\ \boldsymbol{A}''(26) < \mathbf{0}\ donc\ \big(26, A(26)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ A.$

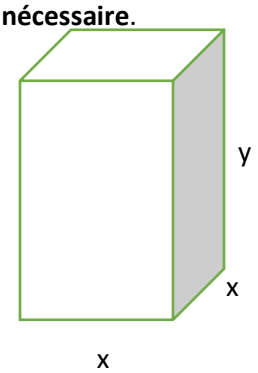
- 6) Formuler la réponse

Si x = 26 alors y = ?

Comme $y = 55-x$, alors $y = 55-26,$ alors y = 29

Les dimensions sont donc de 26 cm de largeur et de 29 cm de hauteur.

d) Une boîte en or à base carrée et ouverte sur le dessus a un volume de 36 cm^3. Déterminer les dimensions que doit avoir cette boîte pour que la quantité d'or nécessaire à sa fabrication soit minimale et évaluer cette quantité minimale d'or nécessaire.



- 1) Définir les variables

x : largeur et profondeur

y : hauteur

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

Q(x, y) = 4xy + x^2 *(4 surfaces rectangulaire et une base)*

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Volume : $x^2y = 36$ d'où $y = \frac{36}{x^2}$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

Q(x, y) = $4xy + x^2$

$$= 4x\left(\frac{36}{x^2}\right) + x^2$$

$$= \frac{144}{x} + x^2$$

$$D'où\ Q(x,y) = \frac{144}{x} + x^2$$

Note : puisque x représente la longueur d'un côté donc, $x > 0$ ou *dom* Q =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

1ère étape : $Q'(x) = \frac{(144)'x - 144(x)'}{x^2} + 2x$

$$= \frac{-144}{x^2} + 2x$$

$$D'où\ Q'(x) = \frac{-144}{x^2} + 2x$$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *Q*.

1) $Q'(x) = 0\ si\ x = \sqrt[3]{72}$, d'où $\sqrt[3]{72}$ est un nombre critique

2) $Q'(x)$ n'existe pas si $x = 0$

$(impossible\ car\ mesure\ nulle\ d'un\ côté\ ferait\ que\ le\ prisme\ n'existerait\ tout\ simplement\ pas\ \ldots)$

3ème étape : calculer Q''*(x)*

$$Q''(x) = \frac{(-144)'x^2 - (-144)(x^2)'}{x^4} + 2$$

$$= \frac{144(2x)}{x^4} + 2$$

D'où Q''(x)= $\frac{288}{x^3} + 2$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$Q''(\sqrt[3]{72}) = 6\ donc\ \boldsymbol{Q''}(\sqrt[3]{72}) > \mathbf{0}\ donc\ \left(\sqrt[3]{72}, Q(\sqrt[3]{72})\right)\ est\ un\ minimum\ de\ A.$

- 6) Formuler la réponse

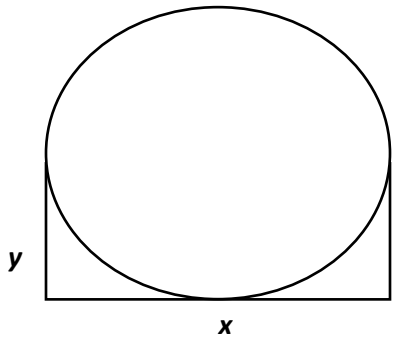
Si x = $\sqrt[3]{72}$ alors y = ?

Comme $y = \frac{36}{x^2}$, alors $y = \frac{36}{\left(\sqrt[3]{72}\right)^2}$, alors y = 2,08

Les dimensions sont donc de $\sqrt[3]{72}\ cm\ par\ \sqrt[3]{72}\ cm\ par\ 2{,}08\ cm$

La quantité d'or nécessaire est de *Q(x, y) = 4xy +* x^2 *= 51,92 cm²*

e) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle est de 8m, déterminer les dimensions de la fenêtre d'aire maximale.



- 1) Définir les variables

x : Base du rectangle

y : Hauteur du rectangle

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

$A(x, y) = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$: *Aire rectangle + aire demi-cercle*

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Périmètre rectangle : $2x + 2y = 8$

d'où $y = 4 - x$

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

$A(x, y) = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x(4-x) + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x(4-x) + \frac{\pi\frac{x^2}{4}}{2}$

D'où $A(x, y) = 4x - x^2 + \frac{\pi x^2}{8}$

Comme la x représente la base, x > 0 *dom A* =]0, +∞

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $A'(x) = 4 - 2x + \frac{2\pi x}{8} = 4 - 2x + \frac{\pi x}{4} = 4 - x\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$ *en factorisant*

D'où : $A'(x) = 4 - \left(\frac{8-\pi}{4}\right)x$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *A.*

1) $A'(x) = 0\ si\ x = \dfrac{16}{8-\pi}$, d'où $\dfrac{16}{8-\pi}$ est un nombre critique

2) $A'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *A''(x)*

$$A''(x) = -\left(\frac{8-\pi}{4}\right)$$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$A''\left(\frac{16}{8-\pi}\right) = -\left(\frac{8-\pi}{4}\right)$$

$$donc\ \boldsymbol{A''}\left(\frac{16}{8-\pi}\right) < \mathbf{0}\ donc\ \left(\frac{16}{8-\pi}, A\left(\frac{16}{8-\pi}\right)\right)\ est\ un\ maximum\ de\ A.$$

- 6) Formuler la réponse

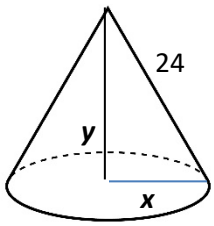
Si x = $\frac{16}{8-\pi}$ alors y = ?

Comme $y = 4 - x$, alors $y = 4 - \frac{16}{8-\pi}$, alors $y = \frac{4(8-\pi)-16}{8-\pi} = \frac{32-4\pi-16}{8-\pi}$ d'où y = $\frac{16-4\pi}{8-\pi}$

La base du rectangle est $\frac{16}{8-\pi}$ et la hauteur du rectangle est $\frac{16-4\pi}{8-\pi}$. La hauteur de la fenêtre est de $\frac{16-4\pi}{8-\pi}$ + le rayon du demi-cercle ($\frac{x}{2} = \frac{(16/(8-\pi))}{2} = \frac{8}{8-\pi}$)

La hauteur de la fenêtre est de : $\frac{16-4\pi}{8-\pi} + \frac{8}{8-\pi} = \frac{16-4\pi+8}{8-\pi} = \frac{24-4\pi}{8-\pi}\ m$

f) On forme un cône dont l'apothème est de 24 cm. Déterminer la hauteur du cône si son volume doit être maximal.



- 1) Définir les variables

x : rayon de la base circulaire

y : hauteur du cône

- 2) Déterminer la quantité à optimiser (règle de l'objectif)

V(x, y) $= \frac{\pi x^2 y}{3}$ *car volume cône* $= \frac{A_b\, x\, h}{3}$

- 3) Chercher les équations entre les variables (exprimer l'une en fonction de l'autre)

Pythagore : $x^2 + y^2 = 24^2$

D'où $\mathrm{x}^2 = 576 - \mathrm{y}^2$: J'aime mieux isoler x^2 car dans V(x, y) $= \frac{\pi \mathrm{x}^2 \mathrm{y}}{3}$, il sera plus facile de substituer x^2 par $576 - \mathrm{y}^2$ que $\mathrm{y} = \sqrt{576 - \mathrm{x}^2}$…

- 4) Exprimer la quantité à optimiser (règle de l'objectif) en fonction d'une seule variable

V(x, y) = $\frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi(576 - y^2)y}{3} = \frac{(576\pi - \pi y^2)y}{3}$

D'où V(x, y) = $\frac{576\pi y - \pi y^3}{3}$

- 5) Analyser la fonction à optimiser : Test de la dérivée première ou test de la dérivée seconde pour trouver la solution qui optimise la situation (Cibler le Max ou le Min)

Test de la dérivée seconde

1ère étape : $V'(y) = \frac{576\pi - 3\pi y^2}{3}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *V.*

1) $V'(y) = 0\ si\ x = \sqrt{\frac{576}{3}}$, d'où $\sqrt{\frac{576}{3}}$ est un nombre critique

2) $V'(y)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *V''(y)*

$$V''(y) = \frac{-6\pi y}{3}$$

D'où $V''(y) = -2\pi y$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$$V''\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right) = -2\pi\sqrt{\frac{576}{3}}$$

$$donc\ \boldsymbol{V''}\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right) < \mathbf{0}\ donc\ \left(\sqrt{\frac{576}{3}}, V\left(\sqrt{\frac{576}{3}}\right)\right)\ est\ un\ maximum\ de\ V.$$

- 6) Formuler la réponse

La hauteur du cône est y = $\sqrt{\frac{576}{3}}$ cm