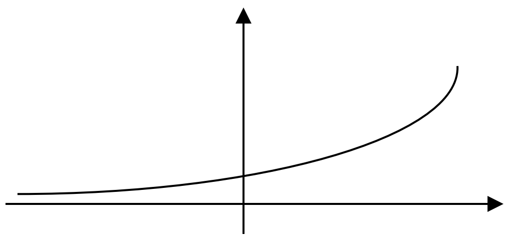
Résumé chapitre 5: Fts exponentielles et logarithmiques

Graphiques

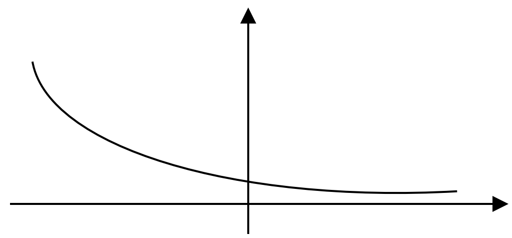
Ft. exponentielle $y = a(c)^{b(x-h)} + k$ (**on peut toujours combiner le b avec la base c**)

Asymptote y = k (horizontale --------)

Base c > 1



Base c : 0 < c < 1



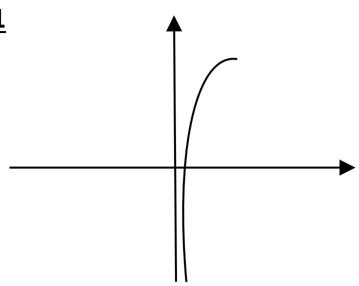
Donc la règle devient $y = a(c)^{x-h} + k$

Étapes pour tracer l'esquisse :
1- Éliminer le « b »
2- Analyser la base « c » croissante ou décroissante
3- **Si « a » est négatif : réflexion d'axe « x »**

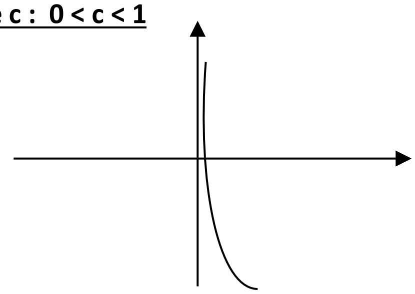
Ft. Logarithmique $y = a \log_c[b(x - h)] + k$ (**il est impossible d'éliminer le paramètre b**)

Asymptote x = h (verticale)

Base c >1



Base c : 0 < c < 1



Étapes pour tracer l'esquisse :
1- Mettre « b » en évidence simple
2- Analyser la base « c » croissante ou décroissante
2- Si « a » est négatif réflexion d'axe « x »
3- Si « b » est négatif réflexion d'axe « y »

Les 5 lois des log

1- $C^{\log_c m} = m$
2- $\log_c mn = \log_c m + \log_c n$
3- $\log_c m/n = \log_c m - \log_c n$
4- $\log_c m^n = n \log_c m$
5- $\log_c m = \log m / \log c$

Notes:

Log = exposant

$\log m = \log_{10} m$

$\ln m = \log_e m$

Équation logarithmique

1- Établir les restrictions (argument > 0)
2- Isoler le log (Regrouper les log s'il y a lieu)
3- Changer l'expression logarithmique en expression puissance exponentielle ***
4- Isoler x

Ex. $\log_2 (3x) + 4 = \log_2 (x-1) + 7$

1- $3x > 0 \rightarrow$ **$x > 0$** et $x - 1 > 0 \rightarrow$ **$x > 1$**
2- $\log_2(3x) - \log_2(x-1) = 3$ ----loi 3----- $\log_2\frac{3x}{x-1} = 3$
3-

$2^3 = \frac{3x}{x-1} \rightarrow 8 = \frac{3x}{x-1} \rightarrow 8(x-1) = 3x \rightarrow 8x - 8 = 3x \rightarrow 5x = 8 \rightarrow x = 1{,}6$ ok

Équation exponentielle sans les log

1- Retrouver la même base pour toutes les puissances
2- Déduire de l'égalité des bases; l'égalité des exposants
3- Isoler x

Ex. $2^{x+1}\ 4^{3x} = 32^{2x-3}$

1- $2^{x+1}\ (2^2)^{3x} = (2^5)^{2x-3} \rightarrow 2^{x+1}\ 2^{6x} = 2^{10x-15} \rightarrow 2^{7x+1} = 2^{10x-15}$
2- $7x+1 = 10x-15$
3- $16 = 3x \rightarrow 16/3 = x$

Équation exponentielle avec les log

1- Appliquer la loi fondamentale pour obtenir les mêmes bases à toutes les puissances
2- Appliquer les lois des exposants pour regrouper les puissances ensembles
3- Égaliser les exposants
4- Isoler x

$5^{2x}\ 4^{x-2} = 3^{2x-3}$

$5^{2x}\ \left(5^{\log_5 4}\right)^{x-2} = \left(5^{\log_5 3}\right)^{2x-3}$

$5^{2x}\ (5^{0,86})^{x-2} = (5^{0,68})^{2x-3}$

$5^{2x}\ 5^{0,86x-1,72} = 5^{1,36x-2,04}$

$5^{2,86x-1,72} = 5^{1,36x-2,04}$

$2{,}86x - 1{,}72 = 1{,}36x - 2{,}04$

$x = -0{,}21$

Si une seule puissance:
$3(5)^{x+1} = 12 \rightarrow 5^{x+1} = 4$
$x+1 = \log_5 4 \rightarrow x+1 = 0{,}86 \rightarrow x = -0{,}13$

Problèmes modèles exponentiels $v_f = v_i\ (\text{base})^{\text{période}}$

Ex. Capital investi 2000$ tx. d'intérêt 5%/an capitalisé tous les 3 mois

a) Combien aurons-nous dans 5 ans? $V_f = 2000(1+0{,}0125)^{20} = 2564{,}07\$$
   5% → 12 mois (1,25% pour 3 mois) et combien de 3 mois dans 5 ans?
   ?% → 3 mois car 4 « 3 mois » par année
b) Combien d'années pour obtenir 2500$
   $2500 = 2000(1{,}0125)^x \rightarrow 1{,}25 = 1{,}0125^x \rightarrow x = \log_{1,0125} 1{,}25 =$ **17,96 « périodes de 3 mois »**
   Donc 17,96x3mois = 53,89 mois donc 53,89/12 = 4,49 années